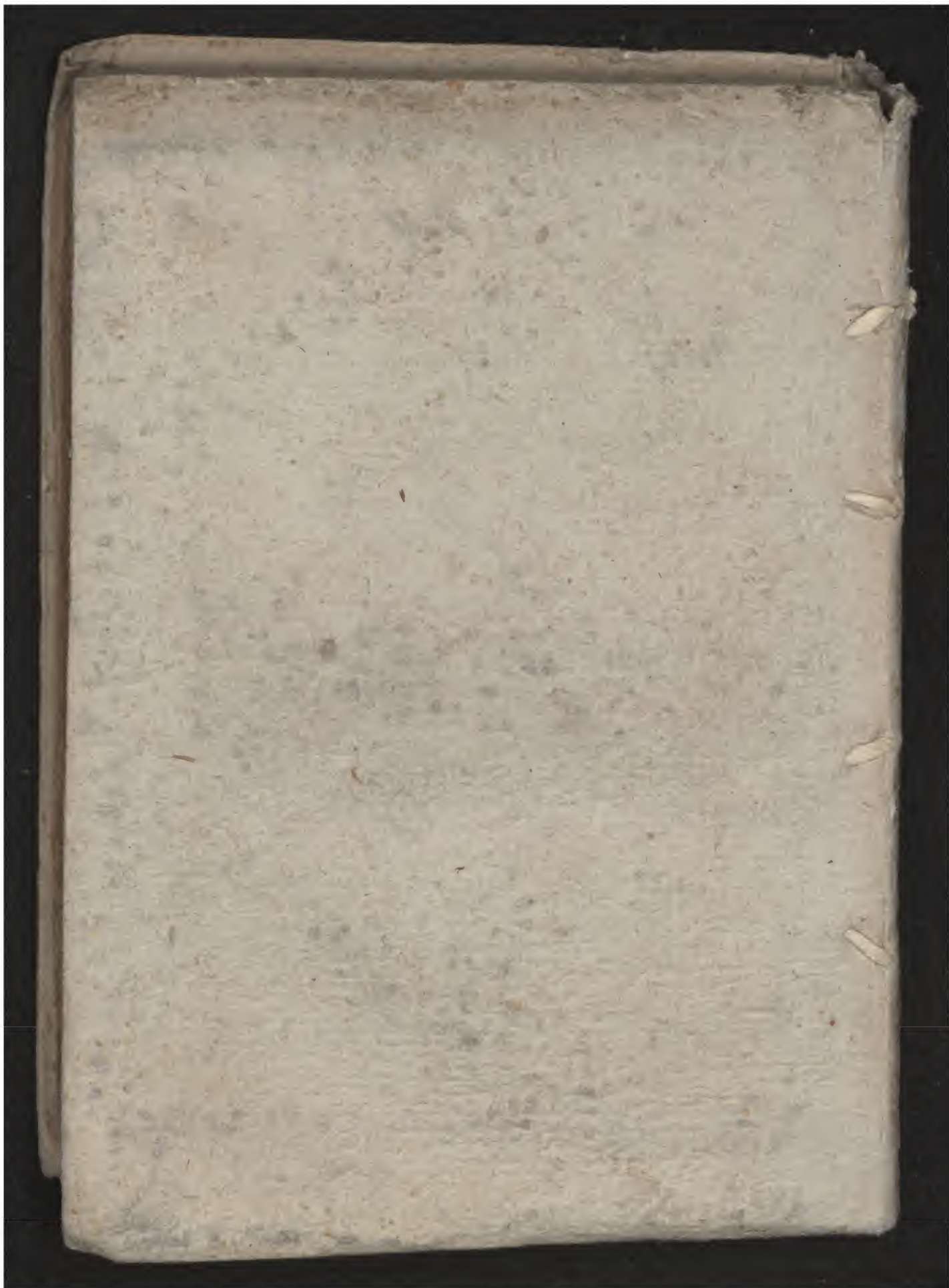




Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.321/a

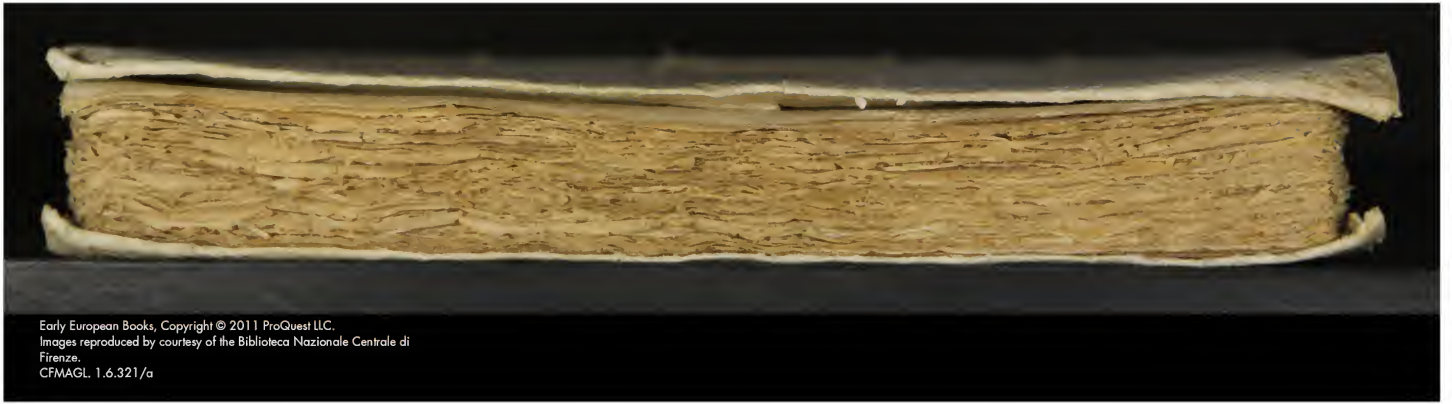




Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.321/a



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.321/a



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL 1.6.321/a



PARS SECVNDA.
IN QVA EXAMEN INSTITVITVR
Circuli Quadraturæ quam R. P. GREG.
A SANCTO VINCENTIO
Exposuit.
LIBER PRIMVS.
RATIONVM ACCVRATA
TRACTATIO.

PROP. I. DEFINIT.

Ratio est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam secundum quatitatem habitudo.



TA Euclides lib. 5. definit. 3. Rationem definit. quam eius Commētatores fusè, vt materiæ exigit grauitas, exponunt: & varias eius diuisiones instituunt. Quibus omnibus missis, cum obuia sint. Vnum moneo, quod sæpius
A 2 occurrit:

occurrit: nempe, illam è duabus quantitibus, inter quas ratio dicitur intercedere, vocari Terminum Antecedentem, quæ ad alteram refertur: hanc verò ad quam refertur prior, dici Terminum Consequentem.

P R O P. II. DEFINITIO.

Singularis cuiusvis Rationis denominator est ratio similis terminis constans in eâ Rationis specie, notissimis.

E X P O S I T I O.

Magnum est, vbi de Rationibus agitur ad eas pertinentium denominatorum momentum: vt paulò accuratioris de iis tractationis minime nos tædere debeat: cum præsertim eorum mentio frequentissima posterum futura sit: vixque alius præter hunc Geometram clarissimum occurrat, qui caput istud præ cæteris in Geometria celebre vel attigerit, vel ad rem mentemque meam satis aptè tradiderit. Itaque

Cum duo sint Quantitatis diuersa genera, continuæ scilicet & discretæ: cuius vtriusque Quantitates inter se comparatæ Rationem generare aptæ sint; magnum tamen est, vt ex dicendis patebit, inter vtrasque discrimen quoad euidenciam & faciliorem cognitionem. Hic enim, quemadmodum & aliàs semper, discreta Quantitas præ continuâ longe se notiozem & apertiozem præbet quoad nos, quamuis quoad se pari fere gradu incedant ambæ. Quare è re maximè futurum est; si prius, quæ ad Denominatores Rationum
quanti

quantitatis discretæ pertinent, exposuero: eaque deinceps ad continuam quantitatem applicauero.

P A R S P R I M A:

Denominatores discretæ Quantitatis.

Vt res tota tractetur planius: exemplum propono, quod versemus. Conferatur numerus A ad numerum B: quis Rationis huius, Antecedentis A ad Consequentem B futurus est denominator? Respondeo eum esse Rationem quamdam similem Rationi A B, siue eiusdem speciei cum Ratione A B; quæ omnium Ra-

A	45	C	5
B	9	D	1

tionum similium Rationi A B, siue omnium Rationum illius speciei notissima per se sit, vt habet allata Propositio. Quod

si iam quærat quænam sit illa Ratio, & quomodo determinetur. Respondeo iam aliud aliquid quæri præter definitionis sensum, quæ terminorum expositione solâ contenta est, eamque quæstionem Theoremate, aut etiam Problemate soluendam esse: eam tamen adhuc locum maximè pertinere: nec posse definitionem allatam clarè percipi, nisi accedat eius solutio; quam propterea nunc prosequor. &

Assero primò notissimam illam Rationem, quæ sit denominator Rationis A B; eam esse, quæ similis cum sit Rationi A B, unitatem habet pro termino Consequente, qualis est in schemate Ratio C D. Assertionis ratio clara est. Cum enim (quod nemo non admittet) quò maior est numerus, siue ex pluribus unitatibus compositis coalescit,

A 3 eò

eò ægriùs concipiatur, mentem scilicet maiori illa
 multitudine obruente; eò autem faciliùs, quò paucio-
 ribus constat vnitatibus: quis eo numero notior po-
 test exhiberi, quem sola componit vnitas. Accedit
 quòd ipsa sit omnium numerorum radix, & elemen-
 tum in quod resoluantur omnes; ipsa verò in nullum
 aliud simplicius dissolui queat: adeò vt fixa & immu-
 tata semper sit non in vniùs tantùm speciei Ratione
 sed in omnibus; atque ita Rationum mensura sit ab
 Antecedente Rationum singularum determinata ad
 talem vel talem Rationis speciem: quâ quæ vniuersalior
 Rationum mensura dari possit? Tertiò nec sui ipsius
 multiplicatione, vel in se, vel in alium numerum, vel
 se, vel alium numerum auget: nec diuisione sui ipsius
 vel alterius numeri, per se ipsam, minuit. Sit etiam cu-
 iusvis speciei numerus; erit planus, erit solidus, erit ra-
 dix tam plani, quàm solidi absque omni sui mutatio-
 ne: quæ fixa & statura habitudo in omnibus; maxime
 propria est conditio mēsuræ ac determinationis Ratio-
 num singularum, qua natus est fungi earum proprius
 denominator. Atque hæ omnes affectiones Rationis
 illius, cuius Consequens est vnitas, non tantùm con-
 uenit Rationibus maioris inæqualitatis; sed etiam Ra-
 tionibus quibuscumque inæqualitatis minoris. Imò
 etiam Rationibus irrationalibus; quarum scilicet ter-
 mini sunt irrationales. Quod exemplis iuuerit illustra-
 re. Vis denominatorem Rationis
 minoris inæqualitatis terminorum
 E, F, Antecedentis scilicet 3, ad Con-
 sequentem

E	3	G	$\frac{1}{5}$
F	15	H	1

sequentem 15. hoc est, Rationem similem Rationi EF : cuius Consequens sit vnitas ? hanc exhibeo $G \frac{3}{15}$ vel (in minimis) $G \frac{1}{5}$ ad H. 1. Quo denominatore ostenditur Ratio EF esse subquintupla, quemadmodum Antecedens G est subquintuplus Consequentis H, qui est vnitas. Pari modo Proponitur irrationalis Ratio Antecedentis E $\Gamma 10$. ad $\Gamma 3$ Consequentem : Denominator, qui est Ratio similis Rationi

E	$\Gamma 10$	$G \frac{\Gamma 10}{\Gamma 3}$
F	$\Gamma 3$	H. 1.

EF, & cuius Consequens sit vnitas; erit GH: quo declaratur ita se habere Antecedentem E ad Consequentem F; vt se habet

Antecedens $G \frac{\Gamma 10}{\Gamma 3}$ ad 1 Consequentem. Quod verum ex eo patet: quod idem numerus nascatur ex multiplicatione primi E in quartum H; & secundi F in tertium G. Atque ita in ceteris omnibus Rationibus fieri censendum est.

Affero secundò exprimi non solere, nec opus esse, unitatem illam: quæ in denominatoribus est Consequens. Verbi gratiâ. Denominator Rationis AB, est C 5 ad D 1.

A	45	C 5
B	9	D. 1.

Dico Consequentem D reticere posse commodè, & ita fieri solere Cum enim C sit numerus atque adeò ex vnitatibus tot vel tot com-

positus; quarum multitudinem ipse numerus designat, hoc est, vnitas numerum illum per ipsum numerum metitur satis indicat per se, quam habeat habitudinem ad vnitatem; etsi vnitas non exprimatur; ita vt terminus C absolutus & minimè ad vllum Consequentem relatus videatur quanquam reuera absolutus non sit re
attentiùs

attentiùs perpensâ , diceturque Ratio A B , quintupla, à Denominatore C ; quasi absolutè sumpto. Nec dispar est ratio; quando Ratio est minoris inæqualitatis, atque adeò Antecedens denominatoris , minor est Consequente , qui est vnitas. Imò nec in irrationalibus vllum discrimen reperire est. Quare in vniuersum vera est assertio.

Assero tertio. Denominatorem Rationis alicuius non male sæpiùs dici Rationis quantitatem. Ostendit enim quanta sit Ratio Antecedentis ad Consequentem collati. Quæ Ratio siue habitudo , ens est relatiuum suscipiens maius & minus ; prout eius fundamentum, quod est quantum, maius vel minus suscipit : & reuera, cum, vt dictum est, denominator sit Ratio similis, siue æqualis Rationi, quam denominat, esto apertior sit, & euidetior , optimè dici potest Rationis denominatæ quantitas ; cum eadem sit etiam quantitas Rationis, quam continet denominator.

Assero quarto. Ratio , quam continet denominator , alio ulteriori denominatore caret ; sed sibi ipsi & denominator est & mensura. Ratio patet ex superioribus, denominator enim debet esse Ratio omnium Rationum eiusdem speciei notissima , paucissimis terminis constans, &c. Quæ in eadem Rationis specie vnica est, præterea si denominatoris denominator daretur ; eodem iure tertius huius secundari deberet denominator.

Assero quinto. Si denominator Rationis alicuius ducatur in eius Consequentem , producit Rationis Antecedens. Hoc est principium quartum à Geometra statutum
lib.8.

lib. 8. quod tamen medio non caret, quo demonstretur; atque adeo minime per se notum videatur. Ita

A	8	C	2
B	4	D	1

ergo demonstrabitur sit Rationis A.B Denominator C.D. Ita se habet C ad D, ut A ad B. Ergo C multiplicans B, eundem numerum producit, quem producit D multiplicans A. Sed D multiplicans A producit A (est enim D vnitas.) Ergo etiam Denominator C (etiam si absolutus censeatur) multiplicans Consequentem B, producit Antecedentem A.

Assero sextò. Si Antecedens A diuidatur per Consequentem B, produci Denominatorem C. Patet ex assertione præcedente: quod enim componit multiplicatio, idem resoluit diuisio. Atque hinc patet non malè ab aliquibus Denominatorem definiri per hanc proprietatem ut Denominator sit productus, numerus ex diuiso Antecedente Rationis per eius Consequentem.

P A R S S E C U N D A.

Denominatores continuæ quantitatis.

Assero primò. Ut in discretâ quantitate, ita etiam in continua dari Denominatorem Rationis cuiuslibet solitariè & absque omni relatione ad aliam Rationem sumptæ. Non abs re hic primùm quæro an detur in hoc genere quantitatis, Rationis vnus singularis proprius Denominator. Cum id summus Geometra noster apertè neget lib. 8. Defin. 2. Vbi semel atque iterum ait. Si Ratio, quæ in numeris exprimi nequeat, solitariè sumatur Denominatorem

B

eius

eius Geometricè exhiberi non posse. Quis enim non hareat, inquit, & meritò percellatur, si ab eo postuletur Denominator Rationis A ad B. Et Rationem affert: quia nulla linea, verbi gratiâ, E habet quidquam peculiare plus

A —	E —
B —	
C —	F —
D —	

quàm alia quælibet; quo possit explicare habitudinem Antecedentis A ad Consequentem B. Atque ita alia atque alia foret Ratio A B, pro-
ut alia atque alia lineæ in Denomi-

natores illius assumerentur.

Quod si (eius sunt verba) binæ datae fuerint Rationes, ut A B & C D, assignari poterunt singularum Denominatores E & F; qui demonstrent, qualis inter Rationes ipsas Proportio intercedat. Habes tanti Geometrae sententiam, à qua me ægrè quidē auellunt, auellunt tamen momentum maximi Rationes; quibus Assertionis meae veritas stabilitur. Nam primò. Cum in Ratione singulari duorum terminorum discretæ Quantitatis, nemine discrepante, exhiberi possit Denominator: quid affertur discriminis, quod in continuâ aliter sentire compellat? Deinde cum ipse Geometra citato loco, etiam in continuâ, cum termini Rationis singularis Arithmeticè exprimi possunt, Denominatores agnoscat: Cur in reliquis eiusdem naturæ terminis, licet sint incommensurabiles, idem non admittatur. Quid, si attendatur, quod superius ostendi Assert. I. Rationes irrationales discretæ quantitatis (quibus quælibet Rationes irrationales quantitatis continuæ exprimi possunt) proprio Denominatore gaudere? nunquid eodem iure priuari

priuari possunt? Denique hoc ipsum non obscure ex Euclide lib. 6. Def. 5. eiusque Interpretibus omnibus colligitur. Vbi compositionem Rationis definiens ait *Rationem ex rationibus componi: cum Rationum Quantitates in se ductæ aliquam effecerint Rationem.* Vbi per Rationum Quantitates, volunt omnes ab eo intelligi, Rationum Denominatores. Nec dubium, quin de continua quantitate eam compositionem intelligat, cum totus hic liber sextus, quem auspicatur, ad id genus quantitatis pertineat. Neque, opinor, censebit quispiam, Rationum componentium, verbi gratiâ, in superiori schemate, Rationum AB , CD , quantitates siue Denominatores esse E & F , vt exposuit Geometra: qui in se ducti Rationem generent compositam ex Rationibus AB & CD . Nam composita Ratio duobus terminis constare debet Antecedente & Consequente: At quantitates E & F in se ductæ vnicum absolutum terminum producant, rectangulum scilicet vnicum absque omni alio termino ad quem referatur, & cum quo Rationem aliquam constituat. Denique hæc Assertio mea ex eo etiam confirmabitur; cum ostendam quisnam sit Rationis cuiuslibet Denominator.

Assero secundo Rationum AB & CD , superioris schematis, Denominatores E & F , dici nullo modo posse. Nam si Ratio EF exprimat Proportionem, vt ait Author, Rationis AB ad Rationem CD , hoc est, sit verus & proprius Denominator proportionis Rationum AB & CD : quomodo quantitas E vt dicatur Denominator

.B 2 Rationis

Rationis A B, exprimit habitudinem termini A ad terminum B; vel quantitas F, termini C ad terminum D. Longe enim alia est habitudo Rationum A B, C D inter se, quam exprimit Ratio E F, ab habitudine termini A ad terminum B; vel termini C ad terminum D. Quod vnico Argumento euidenter expono. Sint Rationes A B & C D similes in quauis specie Rationis, vt duplæ. erunt E & F æquales, vt scilicet Ratione E F ostendatur Proportio Rationum A B, C D similitum siue æqualium: & dicetur E ex mente Geometræ Denominator Rationis A B duplæ: sicut F duplæ Rationis C D. At verò si supponantur iterum A ad B, & C ad C Rationem habere quadruplam: erunt perinde, vt ante, E & F æquales, eò quod ostendant Rationes A B, C D æquales, nempe quadruplæ. Ergo rursus tam E quam F, quæ erant Rationis A B, & Rationis C D duplarum Denominatores. Sunt etiam sine vlla mutatione Denominatores Rationum quadruplarum; & aliarum omnium similitum. Quod longè abest ab officio Denominatoris: qui singulis Rationibus, singularis & proprius & ab omni alio diuersus assignatur. Vnde patet Rationes A B, C D aut carere omni Denominatore, aut alium singulis assignandum esse, quam E & F; aut certè hos impropriè & contra Denominatoris notionem & officium Rationibus illis applicari.

Affero tertio. Cuiusvis Rationis singularis & solitariè sumptæ verum & proprium dari Denominatorem; cùmque in omnibus Quantitatis speciebus corpore, superficie, & lineâ, esse

esse Rationem denominatæ Rationi similem duabus rectis lineis expressam. Nam Denominator debet quoad se notissimus esse, atque adeò simplicissimus. Ergo in primâ specie Quantitatis, lineâ scilicet quæ unicâ dimensione constat, constituendus est. Quis enim non videat speciem secundam Quantitatis, superficiem scilicet, minùs esse per se notam, & difficilius observari Rationem inter duas superficies ob duplicem illam dimensionem, longitudinem nimirum ac latitudinem, quibus omnis superficies constat, & magis composita ac implicata efficitur. Multò minus ad hoc munus apta est tertia quantitatis species, ob triplicem; quam inuoluit dimensionem. Deinde cum ea sit Rationum proprietas, ut binæ vel plures Rationes Rationis aliquam compositionem efficere natæ sint; quæ compositio peragitur ductis inter se Rationum Denominatoribus, siue Quantitatibus, ut Definit. 5. lib. 6. docet Eucl. quanam ratione, si Denominatores forent superficies, absolui posset illa multiplicatio? quanam noua species quantitatis ex ea multiplicatione oriretur? si enim superficies in lineam ducatur, corpus gignitur, hoc est, vltima & maxime composita species quantitatis. At superficies in superficiem, & multò minùs corpus in corpus duci nullatenùs concipi possit, nec huiusmodi multiplicationis quisquam meminit aliquando. Quare certum esto, omnes omnium Rationum Denominatores ad primam speciem quantitatis pertinere: & quidem ita, ut non quælibet lineæ eo munere fungi aptæ sint; sed, ut fert Assertio mea, lineæ tantùm rectæ illud

B 3 sibi

sibi vindicent, ut pote simplicissimæ, notissimæ, regularissimæ.

Dixi præterea duas illas lineas rectas, quarum Ratio est Denominator Rationis alicuius; debere utrasque exprimi. In hoc enim differt quantitas continua à discreta: siquidem in discretâ Consequens est semper unitas, id est, certa & determinata pars Antecedentis, ab ipso Antecedente connotata, ut supra docui. At in continuâ quantitate, cum diuisibilis sit in infinitum, nullâque parte primâ & elementari constet, in quam ultimò resoluatur: non potest denominator constitui, nisi Consequens, alioqui incertus futurus, exprimatur. Nec mirum si hæc differentia inter continuam & discretam Quantitatem minus accuratè observata, minùsque cautè perpenſa connotatio illa Denominatoris cuiuslibet ad unitatem, quam in discreta quantitate quilibet Denominator includit; peritissimo cuique Geometræ negotium creare, eumque percellere queat: dum Denominatorem Rationum discretæ quantitatis, unicuique numerum absolutum censebit; & in eum modum censebit etiam Denominatorem Rationum continuæ quantitatis unicuique lineam constare debere: quæ inepta planè est Denominatoris officio fungendi. adeò ut maluerit doctissimus Geometra, ita sentiens; negare unius Rationis solitariè sumptæ Denominatorem dari; quàm talem admittere, qui unica absolutâ lineam designaretur.

Affero quartò Rationem inter duas rectas lineas, non alio

alio Denominatore explicari posse, sed sibi Rationem illam, Denominatorem esse. Similis est hæc Assertio Assertioni quartæ superioris ad discretam quantitatem pertinentis. In eo tamen hæc ab illa differt: quod in hac duæ quælibet lineæ rectæ Rationem constituentes, alia Ratione simili non egeant, quæ Denominatoris officio fungatur; quæcunque tandem lineæ Rationem constituent: in illa verò Ratio quælibet duorum numerorū; cuius Consequens non sit vnitas, Denominatorem sortitur; similem scilicet aliam Rationem ad eos terminos deductam, vt Consequens sit vnitas, vt superius priori parte explicatum est. Diuersitatis huius causa oritur ex diuersâ quantitatis discretæ & continuæ natura. Numeri enim alij aliis explicatiores & notiores dantur prout alij aliis maiori vnitatum multitudine constant, omniumque notissimus, est vnitas quam, quæ Ratio pro Consequente obtinuerit; omnium Rationum similium notissima est, eoque nomine, omnium Denominator. At verò Rationes omnes similes duarum linearum, æque notæ exhibentur; nec vna ab alia differt; nisi ratione maioris aut minoris quantitatis terminorum: nec vna aliqua Ratio exhiberi potest omnium vltima, quam sibi reliquæ similes in Denominatorem assumant. Quo fit, vt singulæ Rationes alio Denominatore à se diuerso careant, quemadmodum in discreta quantitate vltima illa Ratio, cuius Consequens est vnitas, omni alio præter se, Denominatore caret.

Scholium.

Scholium.

Hic obiter iuuerit obseruare sensum definitionis illius 5. Libri sexti Euclidis ex dictis apertissimum fieri; & quomodo cum ipso apprimè concordet Interpretum sententia. Afferit Eucl. def. citatâ, Rationem dici ex Rationibus componi: cum Rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint Rationem. Vbi per Rationum Quantitates, intelligi volunt Interpretes Rationum Denominatores. At, si mens Euclidis attentius perpendatur, nihil aliud ab eo intelligi colligetur, per Rationum Quantitates; quàm ipsasmet Quantitates Rationes illas constituentes. Attendatur enim Propositio 23. lib. 6. vbi afferitur Æquiangulorum Parallelogrammorum inter se Rationem habere eam, quæ ex lateribus componitur. Cui persimilis est Propositio 5. lib. 8. ad discretam Quantitatem pertinens. Sic enim habetur. Plani numeri Rationem inter se habent ex lateribus compositam. Ita vt Euclides hoc in utroque loco ipsasmet quantitates Rationem constituentes, non alias eorum loco substitutas, seu Denominatores, inter se multiplicari velit ad Rationem componendam. Optime tamen Euclidis menti consentit Interpretum expositio, si quæ hic de Denominatoribus exposui, attendantur; ostendi enim proximâ Assertionem quartâ in continua quantitate, ipsas quantitates Rationum, earum Denominatores dici debere. Priore verò parte expositionis, Assertionem 1. docui deno

Denominatorem Rationis inter terminos discretæ quantitatis, esse aliam Rationem similem, sed notiorē; cuius nimirum Consequens sit vnitas, siue explicetur, siue connotetur tantum. At similitudo illa Rationum siue æqualitas; non mutatur; licet mutetur terminorum quantitas, eadem inter eos seruata habitudine vt liberè latera ipsa, siue termini Rationum perinde adhiberi possint ad Rationum Compositionem, ac ipsi Denominatores; qui hoc tantum nomine vsurpari solent: quod notiores sint quoad nos, quàm alij maiores Rationum termini.

PROP. III. DEFINIT.

Proportio est duarum Rationum similitudo.

EXPOSITIO.

Hæc est Definitio 4. libri 5. Euclidis & omnium Geometrarum, vno excepto Geometra nostro: qui Proportionum terminos angustiores quàm par sit, primus obseruauit, vt Prop. 4. sequente exponam. Hæc verò ita intelligi debet, vt duæ Rationes; quarum habitudo, proportio dicitur, sint similes. Vt si Ratio A B sit dupla; dupla etiam sit Ratio C D ad quam refertur A B alioqui si forent dissimiles, vt si A B ratio dupla foret; foret verò Ratio C D tripla, aut alterius cuiuscumque speciei, à Ratione A B diuersæ; nulla inter eas duas Rationes proportio agnosceretur à veteribus Geometris: neque dicerentur quatuor

A	8	C	6
B	4	D	3

C illæ

illæ quantitates A ad B, & C ad D proportionales, sed disproportionales.

PROP. IV. DEFIN.

Proportio est duarum quarumlibet Rationum habitudo.

E X P O S I T I O.

Definitio hæc proportionis, quæ apud Geometram habetur sub initium libri 8, longè est præcedente vniuersalior. Hæc siquidem duas quaslibet Rationes siue similes siue dissimiles, inter se comparat; & habitudinem illam, quam inter se obseruant; proportionem vocat. Vt si Ratio A ad B fuerit dupla, & Ratio C D existat tripla: habitudo illa harum duarum Rationum,

A	8	C	9
B	4	D	3

proportio eodem iure dicetur; ac si inter eas similitudo intercederet, vt vult communis definitio, hæctenus admissa, quam Prop. 3. exposui. Et verò Ratio A B dupla ad Rationem C D triplam collata; relationem quandam habet, siue habitudinem secundum quantitatem; quæ habitudo, proportionis nomine æquè donari debet; ac si binæ Rationes similes forent: dicetur tamen proportio inæqualitatis, vel maioris vel minoris, vt in Rationibus simplicibus, quædam est Ratio æqualitatis, cum termini sunt æquales; quædam inæqualitatis, cum Antecedens Consequente maior aut minor est. Est enim proportio duarum quarumuis Rationum Ratio: quæ Rationum Ratio siue habitudo, Proportio siue Analogia dicitur, vt distingua-

tur

tur ab aliis Rationibus, quæ inter quantitates absolutas tantum reperiuntur.

Obseruandum porrò est quod Euclides lib. 5. Definit. 9. asserit, nimirum proportionem tribus terminis paucissimis constare, quod contingit, cum vnus terminus duorum vices sustinet, dum prioris Rationis est Consequens, at idem Antecedens est posterioris. Sed tunc quatuor etiam sunt termini formales; licet materiales tres tantum numerentur.

Denique eiusdem speciei semper erit proportio; quamuis vna Rationum ad vnâ speciem quantitatis pertineat verbi gratiâ, ad solida, altera verò ad lineas vel numeros aut tempora, &c. Quantitas enim materiale tantum est Rationum.

PROP. V. DEFINIT.

Proportionis, quæ inter duas Rationes tam continuæ quam discretæ quantitatis, intercedit, denominator, sunt duæ quantitates: quæ habitudine suâ clarè demonstrant: qualis sit inter ipsas Rationes habitudo, siue qualis sit earum Rationum Ratio, quam vocauimus Proportionem Prop. 4. præcedente.

EXPOSITIO.

Nullam de Denominatore Proportionum inter duas Rationes, mentionem fecere hactenus Geometra. Nec immeritò. Cum enim illam tantum Proportionem agnoscerent: quæ inter duas Rationes similes siue æquales reperitur; nullo opus erat Denominatore: hoc enim ipso quòd duæ Rationes æquales suppone-

C 2 bantur;

bantur; earum habitudo inter se, siue æqualitas exhibebatur. At postquam eximius Geometra Rationes etiam dissimiles inter se cōparare docuit; quia dissimilitudo illa habitudines infinitas inter Rationes inuehit, non minùs quàm inæqualitas inter quantitates inæquales, infinitas Rationes: vt harum Rationum Denominator ad eas explicandas necessarius fuit, ita etiam Denominator assignādus fuit; qui habitudinem, quam binæ quælibet Rationes habēt inter se, clarè exhiberet. Longe autem alius est hic Rationum duarum inter se collatarum Denominator, à Denominatore Rationum singularum, qui habitudinem tantum inter duas quantitates earum designat; cum prioris officium sit habitudinem ipsarum Rationum representare: in quo, quantum & quomodo à Geometra nostro dissentiam perpende ex dictis Prop. 2.

Vt rem totam, quæ quamuis plana, quia tamen noua non potest non pati aliquam difficultatem, oculis subiiciam apertissime, exemplū huiusmodi esto in continua

A ———	E ———
B ———	F ———
C ———	
D ———	

quantitate: in qua Denominatore exhibeo Proportionis duarum Rationum A B, & C D. Sic autem habetur (quanquam huius loci non sit, cum inuestigare, vbi tantum definitio, sed maioris lucis gratiā, id fieri nihil vetat) reducatur Consequens D, Rationis C D, ad lineam F æqualem Consequenti B Rationis A B. Fiat scilicet, vt D ad C, ita B ad E & ponatur F æqualis lineæ B. Erit ratio E F æqualis Rationi C D, & ad eam Ratio A B eandem propor

proportionem habebit; quàm priùs habebat ad CD. Quia verò, vt demòstrabo Prop. 7. Ratio AB ad Rationem EF (cò quod æqualis sit vtriusque Consequens ita se habet vt Antecedēs A ad Antecedentē E. Erunt duæ lineæ A & E Denominator proportionis Rationū AB, E F siue AB, CD. Sicut & aliæ duæ lineæ quæcunque, quæ habeant eandem Rationē quam habent A & E. In discretâ verò quantitate Rationū AB, CD Denomina-

A	8	E	2
B	4	F	1
G	6	G	3
D	2	H	1

tores sint EF & GH. Cum Rationes EF & AB; sicut & GH & CD, sint similes; eadem erit proportio Rationis EF ad Rationem GH; quæ est Rationis AB ad Rationē CD. Sed Rationū EF & GH, Consequentes F & H sunt æquales. Ergo ita se habent vt Antecedentes E & G. Ratio ergo E G est Denominator proportionis Rationum EF, GH; siue AB, CD. Atque ex his satis constat quis sit Denominator Proportionis inter duas Rationes iuxta definitionē.

PROP. VI. DEFINIT.

Proportionalitas est proportionum Ratio.

Quemadmodum ea sola proportio est hætenus agnita; quam duarum Rationum similitudo, siue æqualitas generat, ommissa omni alia Rationum dissimilium comparatione: Ita etiam nulla est agnita proportionalitas, nisi quæ ex proportionum similium comparatione enascitur: reiectis tanquam inutilibus Relationibus omnibus, quas dissimiles proportionem habere possunt adinuicem. Verùm cum sine Geometriæ damno, in terminos tam angustos redigi nequeat proportionis

D 3 facultas

facultas ; ita nec proportionalitatis. Quare tam proportionalitatis hic, quàm superius proportionis definitio absolutior constituenda fuit. Itavt proportio competat Rationibus omnibus absque omni similitudinis vel dissimilitudinis distinctione, & proportionalitas pariter omnes Proportiones, è quibus resultat, tam similes quam dissimiles complectatur; vt ex terminis allatæ definitionis colligitur, quæ proportionalitatem vniuersaliter vocat Rationem proportionum, hoc est, habitudinem, quam duæ proportiones, è duabus iam Rationibus inter se comparatis enatæ, habent ad inuicem. Ex quibus sequitur ad proportionalitatem generandam octo concurrere simplices terminos, siue quantitates, Ratio siquidem cum respectiua sit, iam duos poscit terminos: Proportio verò cum sit Rationum Ratio, duas Rationes, è quibus emanet, supponit. Atque adeo terminos quatuor. Denique proportionalitas, quia est duarum proportionum Ratio, necessariò octo terminos habere debet simplices: ex quibus quatuor Rationes, & deinceps duæ proportiones, ac tandem vnica proportionalitas constituatur. Res clara clarior euadet allato exemplo, & hoc schemate expressa. Sit ergo Ratio quædam Antecedentis A 8, ad Consequentem B 4. (Terminos affero discretæ quantitatibus, vt apertiores; eosdem suppose quantitatibus esse continuas) altera verò Ratio quæcumque sit C 6, ad D 2, sit earum Rationum Denominator I 2, K 3. Qui exprimat habitudinem Rationis prioris A ad B, ad posteriorem C ad D: erit Ratio I 2, ad K 3, proportio quarum illarum Rationum, vt ex dictis de proportionibus

tione

Rationes.	Proportiones.		
A—	8	$\left. \begin{array}{l} I—2 \\ K—3 \end{array} \right\} N—\frac{2}{3}$	
B—	4		
C—	6		
D—	2		
			Proportionalitas
E—	12	$\left. \begin{array}{l} L—4 \\ M—5 \end{array} \right\} O—\frac{4}{5}$	
F—	3		
G—	15		
H—	3		

tionem constat, Rursus duæ aliæ Rationes quæcumque proponantur Antecedentis E 12 ad Consequentem F 3; & G 15, ad H 3, Quarum Denominator sit L 4, ad M 5: erit Ratio terminorum L ad M proportio Rationum E ad F, & G ad H. Iam si duæ illæ Rationes I ad K, & L ad M, inter se comparentur, ope Denominatorum ad eas pertinentium, qui sunt $N \frac{2}{3}$ & $O \frac{4}{5}$. Dicitur Ratio N ad O proportionalitas: eo quod sit Ratio proportionum duarum adinuicem comparatarum: patet autem ad unicam illam proportionalitatem constituendam necessarios esse terminos octo simplices tanquam illius primas Radices imo patet, si ulterius huiusmodi Rationum Rationes multiplicare placeret, & duarum proportionalitatum Rationem expendere. Duplò plures futuros terminos simplices. Nam utraque proportionalitas octo terminis constat. Verum vix vlla vnquam cogit necessitas ultra proportionalitatem iam expositam: ulteriorem perscrutari.

Licet porrò ad constituendam proportionalitatem
necessarij

necessarij sint octo termini formales : quinque tamen minimum sufficere possunt. Sed tunc , exceptis primo & ultimo, singuli duorum munere funguntur, Consequentis scilicet ad terminum præcedentem, & Antecedentis ad subsequentem. Quemadmodum ad proportionem non semper quatuor termini formales adhibentur , quatuor licet virtuales concurrant. Neque tamen in hoc casu necessarium est, ut termini illi quinque sint in eadem Ratione continua, licet id fieri possit, & re vera ita supponebatur hætenus à Geometris, tum in Proportionem tum Proportionalitate : sed satis est ut idem terminus bis sumatur, & duas Rationes quasi commune vinculum nectat, siue similes illæ sint, siue dissimiles. Quod si termini continue eandem feruent deinceps Rationem, celebres illas in Geometria progressionem generant : de quibus multi multa; sed vnus præ cæteris plurima & maximè eximia libro toto secundo de progressionibus noster Geometra.

PROP. VII. THEOR.

Duæ Rationes habentes communem terminum Consequentem : eam habent inter se Rationem, quam Antecedentes ipsi inter se.

Monitum.

Licet tum hæc, tum in posterum aliæ propositiones æquè quantitati continuæ ac discretæ conueniant: huic tamen soli, ut euidentiori, & ex cuius terminis ipsis tantum propositis probatio deduci queat à posteriori, Ratiocinationum omnium seriem accommodabo.

dabo. Quas longè facilius futurum est, cuilibet maiori-
 riq̃ue cum luce ad quantitatem continuam transferre,
 si lubet. Præterquam quod, id mihi in hac animi gra-
 tiâ, susceptâ exercitatiuncula propositum est vt cuncta,
 quoad fieri poterit, numeris subiiciam, veritatis haud
 dubiè veris & euidentissimis indicibus.

Demonstratio.

A	8	D	2
	B	4	
C	12	E	3

Sint duæ Rationes A ad B
 & C ad B quarum Conse-
 quens est idem communis
 terminus B. Probandum est

Rationem A ad B, ita se habere ad Rationem C ad B; vt
 illius Antecedens A se habet ad huius Antecedentem
 C. Sit enim Rationis A ad B, Denominator D; & Ra-
 tionis C ad B, sit Denominator E (qui quomodo ha-
 beatur dictum est in annotationibus Prop. 2. n. 2.) Cum
 ergo hi Denominatores siue quantitates seipsis osten-
 dant quænam Ratio inter ipsas Rationes A ad B, & C
 ad B intercedat. Hoc est, ita sit D ad E; vt Ratio A ad B,
 est ad Rationem C ad B ex Prop. 5. Sit autem D ad E, vt
 A Antecedens prioris Rationis ad C Antecedentem
 posterioris, vt statim declarabo, patet veritas propositio-
 nis. Quod verò sit D ad E, vt Antecedens A ad Antece-
 dentem C constat ex annot. 2. & 3. propositionis 5: nam
 Denominator D oritur ex diuisione Antecedentis A
 per Consequentem B: & Denominator E oritur ex di-
 uisione Antecedentis C per eundem Consequentem
 B. Ergo reciproce D multiplicans, B restituet A: & E
 multiplicans B restituet C. Idem ergo B multiplicans

D * Denomi

*

P A R S II.

Denominatores D & E, producit Antecedentes A & C. Qui per 17. lib. 7. Eucl. eādem habent Rationem, quam D & E, unde sequitur Rationes A B, C B, habere inter se eandem Rationem quam earum Antecedentes A & C inter se. Quare, duae Rationes habentes, &c. Quod erat probandum.

PROP. VIII. THEOR.

Si duarum Rationum idem sit Antecedens. Ita erit prima Ratio ad secundam: vt Consequens secundus ad primum.

Demonstratio.

D 4	B 4	D $\frac{4}{1}$	B 9
A 16		A 3	
E 2	C 8	E $\frac{1}{2}$	C 6

Esto A. Antecedens communis duarum Rationum A B, A C. (duo apposui exempla, maioris vnum inaequalitatis, minoris alterum) Dico Rationem primam A B ad Rationem secundam A C ita se habere: vt se habet secundus Consequens C, ad primum Consequentem B. Sint earum Rationum Denominatores inuenti per annot. 2. Prop. 2. prioris quidem, D; posterioris verò E. Erit ergo Ratio A B, ad Rationem A C; vt Denominator D ad Denominatorem E (hæc enim est Denominatorum natura; cum ipsarum sint Rationum quantitates) deinde quia Denominator D habetur diuiso Antecedente A per Consequentem B, vt Prop. 2. annotaui, si Denominator D ducatur in Consequentem B, producet A Antecedens: qui idem propter

propter eandem Rationem produceretur ducto E Denominatore in Consequentem secundum C. Cum igitur idem terminus A produceretur ex ductu termini D in B; & termini E in C. Eadem erit Ratio primi termini D ad secundum E: quæ est tertij termini C ad quartum B, per 16 sexti, vel per 19. sept. Sed ut Denominator D ad Denominatorem E; ita est Ratio A B, ad Rationem A C. Ergo quoque Ratio A B, est ad Rationem A C; ut huius Consequens C, ad illius Consequentem B. Quare. Si duarum Rationum idem &c. Quod erat probandum.

PROP. IX. PROBL.

Duarum Rationum Consequentes Diuerfos ad vnum vtrique communem reuocare.

Constructio.

E 10		E 4	
A 6	C 8	A 3	C 5
B 3	D 5	B 6	D 8

Sint duæ Rationes A B, C D, tam maioris quam minoris inæqualitatis, quarum Consequentes B & D diuerfos, ad eundem reuocare oporteat. Fiat ut Consequens B ad Consequentem D: ita Antecedens A ad alium nempe E. Dico Rationem A B, reuocatam esse ad aliam æqualem E D, cuius Consequens est D, idem scilicet cum Consequente alterius Rationis C D.

Demonstratio.

Cum enim ex constructione ita sit A ad E, ut B ad D:

D: erit Permutando vt A ad B; ita E ad D. Ita vt similes sint, siue æquales Rationes AB, ED. Ergo Ratio AB in aliam ED mutata est: cuius Consequens est D, idem cum Consequente alterius Rationis CD.

Pari modo Ratio CD in aliam mutari posset cuius Consequens foret B; idem cum Consequente Rationis AB. Si nimirum tribus terminis D, B, & C, quartus proportionalis reperiretur; qui esset Antecedens ad Consequentem B, communem factum vtrique datæ Rationi.

Obseruandum si in quantitate discreta: cuius in his maxima Ratio habetur apud me problema soluendum sit; fieri non Ratio, vt Antecedens inuentus simplex non sit numerus, sed integer cum fracto, vel fractus tantum; tunc porrò si terminos simplices statuere lubeat; ducendus erit fractionis Denominator in terminos omnes datarum Rationum qui quidem termini mutabuntur; immutatis tamen eorum Rationibus, quia numerus quilibet alios quoslibet multiplicans, numeros gignit easdem Rationes inter se habentes; quas inter se habent numeri multiplicati per 15. lib. 5. Appono exemplum paulo ante propositum in quo reducenda sit Ratio CD, ad aliam æqualem ita vt eius De-

A 3	C 5	A 3	C $3\frac{1}{4}$	A 12	C 15
B 6	D 8	B 6	D 6	B 24	D 24

nominator sit B 6, idem qui est Denominator Rationis AB. Id absoluetur iuxta traditam methodum si tribus terminis

terminis D 8, B 6, C 5, quartus proportionalis inueniatur qui est $3\frac{1}{4}$ ita ut stent in secundo schemate eadem Rationes; quæ in primo propositæ sunt: sed quarum idem sit denominator communis 6; qui prioris Rationis iam erat denominator. Verum quia Antecedens C $3\frac{1}{4}$ non est terminus simplex, quippe constat numero integro cum fracto: quod alias operationes ex iis absolundas molestiores efficeret. Rationes eadem ad terminos simplices adducentur, terminis omnibus multiplicatis per 4, fractionis huius $\frac{1}{4}$ denominatorem, & primò quidem ducetur 4 in 3 numerum integrum, cui adhæret fractio, ut fiat 12: cui addetur 3, numerator fractionis, ut fiat 15 Antecedens C secundæ rationis. Deinde in Consequentem inuentum 6, utrique Rationi communem ut fiat 24. Denique in Antecedentem A 3. prioris Rationis, ut fiat 12, eius nouus Antecedens: & ita habebuntur termini simplices propositarum Rationum, ut refert schema tertium: qui tamen termini ad minores reduci poterunt, si eos omnes communis aliqua mensura metiatur, per quam singuli diuidi possint, & noui termini earundem Rationum per diuisionem procreari.

Aliter.

Summi est momenti in Rationum negotio hæc Propositio, dignaque propterea quæ aliâ hac methodo soluatur; cum præsertim eam, omisâ priore, adhibiturus sim imposterus sic autem habet.

D

Constructio.

Constructio.

Repetito præcedenti
schemate ducatur Ratio-
nis prioris A B Antece-
dens A, in Rationis po-
sterioris C D Conse-

E	30	F	24
A	6	C	8
B	3	D	5
G 15			

quentem D; vt fiat E. Et vicissim, Rationis postero-
ris Antecedens C, in Rationis prioris Consequentem
B; vt fiat F. Denique duo Consequentes B & D du-
cantur in se inuicem, vt fiat G. Dico Rationes A B &
C D, reductas esse ad alias æquales E G, F G: quarum
idem est Consequens G.

Demonstratio.

Termini A & B prioris Rationis multiplicant Con-
sequentem D secundæ Rationis; & producant E & G.
Ergo per Prop. 18. lib. 7. eadem est Ratio E ad G, quæ
A ad B. Similiter eadem erit Ratio F ad G; quæ est
C ad D. eo quod termini C & D multiplicent B Con-
sequentem prioris Rationis, & producant F & G. Quare
duæ datæ Rationes, quarum diuersus sit Consequens
ad alias duas æquales reuocatæ sunt; quarum sit Con-
sequens communis. Quod præstandum erat.

PROP. X. PROBL.

Duas quasumque Rationes in vnam per ad-
ditionem colligere.

Constructio.

Constructio.

Sint duæ propositæ Rationes Antecedentis A ad Consequentem B; & Antecedentis C ad Consequentem D. In primis, si Consequentes non sunt æquales, ad æqualitatem reducantur per 9. Prop. Deinde

A 3	C $3\frac{3}{4}$	E $6\frac{3}{4}$
B 6	D 6	F 6

addantur Antecedentes A & C, ut fiat E Antecedens Rationis, cui suus

Consequens adiungatur F, idem qui fuerat Consequens, Rationibus datis communis. Dico factum esse quod proponebatur.

Demonstratio.

Nam cum Ratio CD & Ratio EF eisdem Consequentes habeant: erit hæc ad illam ut Antecedens E ad Antecedentem C per 7. huius. Propter quam eandem causam, Ratio EF erit ad Rationem AB. Ut Antecedens E ad Antecedentem A. Tres ergo Antecedentes illi eandem habent inter se Rationem: quam habent inter se trium illarum Rationum denominatores siue quantitates: Imò possunt ipsi denominatorum officio fungi. Ut supra monui Prop. 5. Sed quantitas E coaluit ex additione quantitatum A & C, tanquam partium. Ergo & Ratio EF coalescit ex additione Rationum AB, CD, tanquam partium: denominatores siquidem siue quantitates Rationum, earum ubique munere fungi nati sunt. Duas ergo

D 2 Ratio

Rationes in vnum per additionem collegimus. Quod erat probandum.

Quod si plures Rationes quam duæ simul forent addendæ; duas primùm, deinde ex illis duabus factam, & tertiam colligere necesse erit, & ita deinceps.

P R O P. XI. P R O B L.

Rationem inuenire quæ ad datam Rationem; datam habeat proportionem.

Constructio.

A	3		D	12
		C	4	
B	2		B	2

Data sit Ratio A B : ad quam Ratio inuenienda, debeat habere proportionem cuius denominator est

C, nempe quadruplam. Ducatur C in Rationis Antecedentem A, vt fiat D, dico Rationem D ad B, eam esse, quæ quæritur: quæ scilicet habeat ad Rationem A B, proportionem cuius denominator est C.

Demonstratio.

Ratio D B ad Rationem A B ita est; vt Antecedens D, ad Antecedentem A per 7. Huius, est enim vtriusque idem Consequens B. Sed Ratio D ad A, ea est quam denominat C ex Annotatis 3. num. ad Propos. 2. Ergo Proportio Rationis D B ad Rationem A B, cum habeat Denominatorem C datum, ea est quæ quærebatur.

Corolla

Corollarium.

De industria hic, Corollarium subiungo, quod mihi necessarium olim futurum scio; ideóque attente notatum velim. Est autem huiusmodi.

Deducitur ex solutione præcedentis propositionis; quomodo inueniatur Ratio quæ toties aliam Rationem contineat: quoties hac aliam continet. Sit enim Ratio AB cuius Antecedens A aliquoties sumatur,

A 4		D 8		E 16	toties, verbi gratia, quot sunt in C unitates: vno verbo:
	C 2		C 2		
B 3		B 3		B 3	

bo: A multiplicetur per C: vt fiat D: cui vt Antecedenti apponatur B Consequens Rationis AB. Deinde Rationis DB Antecedens D, iterum per C multiplicetur vt fiat E nouus Antecedens, cuius Consequens sit etiam B. Patet Rationem EB toties continere Rationem DB: quoties DB continet AB. Cum enim harum Rationum idem sit Consequens; ita se habent Rationes inter se; vt earum Antecedentes inter se. Sed Antecedens D. Toties continet Antecedentem A: quoties Antecedens E, continet Antecedentem D; cum vterque ductus fuerit in C. Ergo etiam Ratio DB toties continet Rationem AB; quoties ipsam Rationem DB Ratio EB continet.

Licet verò in proposito exemplo terminos Antecedentes continuè proportionales statuerim ad platiorem demonstrationem aptiores, eo quod sibi

D 3 adci

addeiscant communem Consequentem ; tamen id minimè necessarium est. Quod vt clarissimè pateat ; loco terminorum D & B , vel etiam E & B ; alios quoslibet eandem inter se Rationem seruantes ; quam habent inter se termini D & B , E & B ; substitue. Nihil in Rationibus mutationis continget , vnàque alteram continebit , vt prius ; licet in terminis contingat discrimen maximum.

Nec oberit obseruasse Rationem E B , hoc modo inuentam , esse tertiam proportionalem duabus Rationibus A B , D B : licet termini Antecedentes inter se , ac proinde & Consequentes inter se , nullam certam Rationem obseruent : vt ex dictis proximè colligere licet.

P R O P. XII. P R O B L.

Rationem minorem ex maiore detrahere.

A 3	C 8	E 5
B 4	B 4	B 4

Constructio.

Sit Ratio A B minor subtrahenda à maiori C B : (nisi datae Rationes eisdem sortitae essent consequentes ; ad eos in primis reuocentur per Prop. 9.) Antecedens ergo C , Rationis C B ; maior est Antecedente A. Sunt enim Rationes illae inter se , vt Antecedentes ipsarum propter aequalitatem Consequentium B. Sed Ratio C B maior ponitur Ratione A B : Ergo Antecedens

dens C maior est Antecedente A. dematur ergo A ex C & relinquatur E: cui velut Antecedenti tribuatur idem consequens B. Dico Rationem E B relinqui detracta Ratione A B ex Ratione C B.

Demonstratio.

Rationes A B, C B, E B, eundem Consequentem B habentes, ita se habent inter se, vt earum Antecedentes A, C, E. Ita vt huiusmodi Antecedentes, eandem inter se Rationem obseruent. Quam Rationum illarum denominatores, eorūque vices suppleant. Quia igitur duo Antecedentes A, & E simul, æquales sunt Antecedenti C: etiam Rationes A B, E B, æquales erunt Rationi C B. Et quia Antecedens E, est differentia; qua Antecedens C superat Antecedentem A: etiam Ratio E B erit differentia, qua Ratio C B superat Rationem A B. Detracta igitur est Ratio minor A B ex maiore C B. Et inuentus est excessus, quo C B superat A B: nempe Ratio E B. Quod erat faciendum.

P R O P. XIII. DEFINIT.

Ratio Rationem multiplicare dicitur cum toties composita fuerit ea quæ multiplicatur, quot sunt in multiplicante Rationes æqualitatis, & procreata fuerit aliqua Ratio.

V E L

Ratio Rationem multiplicare dicitur, cum procreata Ratio, eam habet poportionem ad
Ratio

Rationem multiplicatam, quam Ratio multiplicans habet ad Rationem æqualitatis.

Rationum Multiplicatio siue Compositio per se factis obscura; iniri non potuit, nisi prius perspecta foret eius notio: quam propterea duplici hac definitione in idem recidente expono: ei persimili, quæ tradi solet multiplicationis numeri simplicis per numerum simplicem.

Sit ergo Ratio A, B, ducenda in Rationem C, D, toties sumatur Ratio A B: quoties Ratio æqualitatis reperitur in Ratione C, D; vt procreetur Ratio E F; Ratio E F, dicetur multiplicatione Rationis A, B per Rationem C D produci.

A	4	C	6	E	6
B	5	D	4	F	5

Sed vt hæc clarius aperiuntur. Exemplum singulare expono. Ratio A 4, ad B 5, ducenda est in Rationem C 6 ad D 4. Toties sumenda est Ratio 4. ad 5; quoties Ratio æqualitatis est in Ratione 6 ad 4. Quoties verò est Ratio æqualitatis in Ratione 6 ad 4? Respondeo, toties; quoties Consequens D 4, continetur in Antecedente C 6. Vt hic semel. Et præterea $\frac{2}{5}$ vel $\frac{4}{5}$ illius. Nam quoties Antecedens & Consequens sunt æquales; Rationem æqualitatis constituunt: Si ergo Ratio A 4 ad B 5 sumatur semel, & præterea dimidia eius pars, (vt indicat fractus ille numerus

merus $\frac{2}{4}$ vel $\frac{1}{2}$; qui superest, diuiso Antecedente C 6 per Consequentem D 4.) Vt producat Ratio E 6 ad F 5. Erit hæc multiplicatio Rationis A B per Rationem C D, & Ratio E F dicetur producta per huiusmodi multiplicationem; eò quod eandem proportionem habeat ad Rationem multiplicatam A B: quam habet Ratio C D multiplicans ad Rationem æqualitatis.

P R O P. XIV. DEFINIT.

Ratio per Rationem diuidi dicitur; cum Ratio sumpta fuerit: quæ habeat ad Rationem æqualitatis eandem proportionem; quam Ratio diuisa habet ad Rationem diidentem.

V E L

Ratio Rationem diuidere dicitur: cum sumpta fuerit Ratio quæ toties contineat Rationem æqualitatis: quoties Ratio diuidenda continet Rationem diidentem.

Hæc definitio præcedentis inuerfa est: quam eodem Repetito exemplo, sed inuerfo expono.

Ratio EF sit diuidenda per		
A 4	C 6	E 6
B 5	D 4	F 5
Ratio EF sit diuidenda per		
Rationem C D. Si quoties		
Ratio E 6 ad F 5 continet Ra-		
tionem C 6 ad D 4. Toties		

Ratio A 4 ad B 5 contineat Rationem æqualitatis. Vel si Ratio E F eandem habet proportionem ad Rationem diidentem C D: quam habet Ratio A B ad Ra-

E tionem

tionem æqualitatis. Operatio illa, qua Ratio AB inuestigatur, dicitur diuisio.

R R O P. XV. T H E O R.

Si sit Ratio quædam, cuius Antecedens est A & Consequens B. Tertius verò quilibet numerus C, Antecedentem A diuidat, & producat D: qui fiat Antecedens ad Consequentem B. Idem verò C, Consequentem B multiplicet, & producat E: qui fiat Consequens ad Antecedentem A. Dico Rationes duas DB & AE esse æquales.

Demonstratio.

A 24		D 6	A 24
	C 4		
B 5		B 5	E 20

Quia C diuidens A produxit D: si idem C multiplicet D producet A. Quare cum idem numerus C, multiplicet D & B, & producat A & E: erit Antecedens A ad Consequentem E, vt Antecedens D ad Consequentem B. Per 15. lib. 5. Euclidis. Partes enim D, & B cum pariter multiplicibus A, E in eadem sunt Ratione. Constat ergo propositum.

P R O P. XVI. P R O B L.

Oporteat Rationem per Rationem multiplicare.

Constructio.

Constructio.

A 4	C 6	E 6
B 5	D 4	F 5

Sit Ratio A 4.
Antecedentis ad B
5. Consequentem,

multiplicanda per Rationem C 6 ad D 4. Quia Ratio C 6 ad D 4 continet Rationem æqualitatis semel & eius semissem (si enim Antecedens 6 diuidatur per Consequentem 4, patebit hunc in illo semel contineri quæ est vnica Ratio æqualitatis : & præterea dimidiam huius partem) sumatur semel Ratio A 4 ad B 5. Cui addatur dimidia eius pars inuenta per Prop. 11. multiplicetur scilicet Antecedens 4 quasi foret numerus absolutus, nec vlli Rationi alligatus per $\frac{1}{2}$ numerum item absolutum ; gignetur per hanc multiplicationem $\frac{4}{2}$ siue 2 : cui velut Antecedenti apponatur idem Consequens B 5. Erit ergo Ratio Antecedentis 2 ad Consequentem 5 dimidia pars Rationis A 4, ad B 5. Iuxta operationem citatæ. Propositionis, quam de industria hic profecutus sum. Iam hæc Ratio 2 ad 5; ad Rationem 4 ad 5 addatur per Prop. 10. addatur scilicet 2 Antecedens, ad Antecedentem 4, vt fiat vnicus Antecedens E 6 : cui apponatur idem Consequens F 5. Dico Rationem E 6 ad F 5. Produci per multiplicationem Rationis A B in Rationem C D.

Demonstratio.

Toties Ratio producta E F continet Rationem multiplicatam A B. Quoties Ratio C D multiplicans
E 2 continet

continet Rationem æqualitatis : vt patet ex constructione. Ergo Ratio EF per Prop. 13. ea est quæ quærebatur.

Aliter.

A 4	C 6	E 24
B 5	D 4	F 20

Sit eadem Ratio , quæ prius AB multiplicanda per Rationem CD. Ducantur in se duo Antecedentes AC : duo item Consequentes B, D : & producant illi quidem E ; isti verò F. Dico Rationem EF eam esse quæ producitur ex multiplicatione mutua duarum Rationum AB , CD.

Demonstratio.

A 4	C 6	G 4	E 24
B 5	D 4	H 4	F 20

Ponatur Ratio æqualitatis GH: cuius termini æquales debent esse inter se; sint verò æquales consequenti D, Rationis CD multiplicantis. Quia igitur ex Prop. 13. ita se debet habere Ratio æqualitatis GH ad Rationem multiplicantem CD: quemadmodum Ratio AB multiplicata se habet ad Rationem EF. Productam ex multiplicatione Rationis AB, per CD. Vt autem Ratio GH, se habet ad Rationem CD, cuius Consequens D æqualis est Consequenti H: ita se habet Antecedens G ad Antecedentem C per 7. Huius.

Hoc

Hoc est, Consequens D ad Antecedentem C Rationis C D. Si ergo fiat ut D ad C: Ita Ratio A B multiplicata ad aliam E F: erit E F: Ratio quæ quæritur, ut exigit Prop. 13. huius. Disponantur ergo termini ad Regulam Proportionum absoluendam hoc modo.

D 4.	C 6.	A 4	?	E 24	M 6	E 24
		B 5		B 5	B 5	F 20

Ducatur secundus terminus C in A B fiet E B, (Consequens enim B immutatus producto E, adiungitur ut Antecedenti) diuidatur hic productus E B per primum terminum D Regulæ aureæ. Producentur per hanc diuisionem Ratio M B. Diuiso enim Antecedente E per terminum D, fit M; cuius Consequens est B immutatus (ut in fractis numeris fieri solet; quos Rationum termini imitantur) erit ergo tunc Ratio M B ea, quæ quæritur id est, M B toties continebit Rationem A B multiplicatam quoties Ratio C D multiplicans continet Rationem æqualitatis. Sed Rationi M B, æqualis est Ratio E F inuenta iuxta traditam methodum: multiplicatis scilicet Antecedentibus A & C, ut fiat Antecedens E; & consequentibus B & D, ut fiat Consequens F. Id patet ex Prop. 15. per quam constat æquales fore Rationes quando datis duobus numeris E, B. Idem numerus D diuidit eorum alterum, nempe E; & producit quendam ut M: cui adiungitur velut Consequens, alter numerorum B: ut fiat Ratio M B, & quando idem D multiplicat alterum numerorum nem-

E 3 pe

pe B, vt fiat F, qui sit Consequens alterius numeri E immutati, vt fiat Ratio EF. Patet ergo tradita methodo, quæ simplicissima est, recte solui propositum problema.

PROP. XVII. PROBL.

Oporteat Rationem datam per datam Rationem diuidere.

Constructio.

E	6	A	4
F	5	B	5

Vt inuersum est problema hoc præcedentis problematis: ita inuersa futura est eius solutio: quam tamen eadem methodo generali: adhibita scilicet Regula illa vere aurea proportionum auspicabor: inita etenim sæpiùs eadem via, quo tritior, eò planior euadet.

Sit igitur Ratio EF diuidenda per Rationem AB. Quia ex Prop. 14. Eadem est proportio Rationis diuidentis AB ad Rationem EF diuidendam: & Rationis æqualitatis ad Rationem, quæ quæritur, quæque quasi quotientis locum occupat; erit etiam permutando eadem proportio Rationis AB diuidentis ad Rationem æqualitatis; & Rationis EF diuidendæ ad Rationem quæ quæritur vt quotiens. Ita ergo disponendi forent tres noti termini, aptè ad absoluendam auream Regulam, vt habet hoc schema. In quo AB est Ratio diuidens:

A	4	G	5	E	6
B	5	H	5	F	5

diuidens: secundus terminus est GH Ratio æqualitatis, cuius Antecedens & consequens iidem sint cum Consequente B, Rationis AB: tertius denique sit Ratio diuidenda EF. Sed quia duæ Rationes AB, GH eodem habent Consequentes B, H; ideóque per Prop. 7. ita se habent inter se; vt Antecedentes A, G, inter se. Satis erit ad quotientem huius diuisionis obtinendum si Antecedens A solus primum locum Regulæ

			E	6	L	30	L	30
A	4	B	5					
			F	5	M	5	N	20

aureæ occupet: Secundum verò occuparet Antecedens G, sed cum æqualis sit Consequenti B; censeatur ipse B secundum illum locum sibi vindicare; tertius denique locus debetur Rationi diuidendæ EF. Iam terminus B ducatur in terminos EF, velut absolutos & in modum fracti numeri; fiet per hanc multiplicationem quantitas LM. Hæc iuxta tenorem Regulæ diuidatur more fractorum terminorum per primum A. Fiet quotiens LN. Dico ergo Rationem Antecedentis L ad Consequentem N, eam esse quæ quæritur; & indicare proportionem Rationis diuidendæ EF, ad Rationem AB diuidentem. Quod exemplum in hoc, casu in quo Consequentes B & F, ponuntur æquales: (in aliis possent per Prop. 9. ad æqualitatem reduci) euidenter ostendit.

ostendit. Ita enim est Ratio EF, ad Rationem AB; vt Antecedens E ad Antecedentem A. Quæ Ratio E, ad A similis est Rationi inuentæ LN. Verum illud à priori probari debet in hunc modum.

Demonstratio.

Ex discursu in constructione allato: tota pene demonstratio constructionis ipsius habetur. Nam patet ita se habere Rationem AB diuidentem, ad Rationem GH æqualitatis: vt se habet Ratio EF. diuisa, ad Rationem LN inuentam. Ergo Permutando ita se habebit Ratio AB, ad Rationem EF, diuidens scilicet ad diuidendam: vt Ratio GH æqualitatis ad Rationem LN. Ergo per Prop. 14. rectè diuisa est Ratio EF, per Rationem AB; Quod erat faciendum.

Aliter.

Constructio.

A 4	E 9	C 8
B 3	F 6	

Traditur hic modus à Geometra Prop. 125. lib. 8. sic autem habet. Sit data

Ratio EF, diuidenda per Rationem AB, fiat vt Consequens B Rationis diuidentis ad A Antecedentem: vt F Consequens Rationis diuidentæ ad C. Ratio E Antecedentis, datæ Rationis diuidentæ, ad Consequentem inuentum, ea est Ratio quæ quæritur.

Demon

Demonstratio.

Ex constructione ita est B ad A ; vt F ad C. Ergo inuertendo. Vt A ad B ; ita C ad F. Sed , vt in superiori solutione ostensum est , vt A ad B ; ita est Ratio E F diuidenda ad Rationem quaesitam, quæ velut quotiens est huius diuisionis. Ergo vt C ad F ; ita est Ratio E F ad quotientem Rationem. Sed vt C ad F ; ita est Ratio E F ad Rationem E C. Nam duarum Rationum E ad F ; & E ad C ; idem est Antecedens E. Ergo per Prop. 8. huius. Ita se habet Ratio E F ad Rationem E C vt se habet reciproce Consequens C Rationis E C, ad Consequentem F Rationis E F. Sed vt Consequens C ad Consequentem F. Ita ostensum est se habere Rationem E F, ad eam quæ inuestigatur. Ergo Ratio E C illa ipsa est, quæ diuisione Rationis E F, per Rationem A B, producitur.

Aliter.

Constructio.

A 4	E 9	C $2\frac{1}{4}$
B 3	F 6	D 2

Data sint eadem
Rationes. Diuidatur
tam Antecedens E

Rationis diuidendæ, per Antecedentem A Rationis diuidentis, & fiat C, quam Consequens illius F, per huius Consequentem B & fiat D. Dico Rationem C D eam esse, quæ quaeritur.

F

Demon

Demonstratio.

Si termini A & B Rationis diuidentis ducantur in terminos C & D Rationis inuentæ, singuli in singulos: producetur Ratio EF. Vt patet. Ergo Ratio EF rectè diuisa est per Rationem AB, & Ratio CD rectè inuenta tanquam quotiens.

O B S E R V A T I O.

Ex his constat nihil aliud inquiri per diuisionem vnus Rationis per alteram: quam Rationem illam, quam habent inter se Rationes propositæ, vel, vt verbis vtat magis propriis iuxta definitionem proportionis Prop. 4. expositam. Inquiritur Proportio inter Rationem diuidendam & Rationem diuidentem: quæ Proportio, cum nihil aliud sit quam Ratio quam habent inter se denominatores Rationum datarum: nihil aliud quæritur per diuisionem vnus Rationis per aliam; nisi cognitio denominatorum vtriusque illius Rationis: illis enim denominatoribus cognitis, eorum Ratio nota continuò euadit, per solam Relationem denominatoris ad Rationem diuidendam pertinentis, ad denominatorem Rationis diuidentis tanquam consequentem Vt in prioris solutionis exemplo, in quo Ratio E 6 ad F 5 diuiditur per Rationem A 4 ad B 5; & inuenta est Ratio tanquam quotiens L 30 ad N 20, Rationis huius L N termini sunt denominatores Rationum EF diuidendæ, & AB diuidentis: L quidem prioris EF; N verò posterioris AB. Eaque
Ratio

A 4	E 6	L 30
B 5	F 5	N 20

Ratio L ad N (quæ
Proportio Rationum
E F ad A B dici debet)
ostendit quam habi-

tudinem siue Rationem habeat Ratio E F ad A B. Quod in Proposito exemplo, in quo Consequentes B & F sunt æquales, Luce clarius patet. Ita enim se habet Ratio E F ad Rationem A B per Prop. 7. vt Antecedens E ad Antecedentem A: Sunt autem Antecedentes Rationum, quarum idem est Consequens, denominatores earum: constat autem ita se habere L 30 ad N 20; vt se habet E 6 ad A 4. Ex quibus facilis & clara oritur methodus Rationem per aliam diuidendi. Si enim ad æquales Consequentes reducantur; ita se habet Antecedens Rationis diuidendæ ad Antecedentem diuidentis; vt illa Ratio ad istam: ita vt Ratio duorum illorum Antecedentium sit velut quotiens diuisionis, Rationis vnus per aliam.

Ex proximè dictis colligitur demonstratio solutionis cuiusdam facillimæ, Problematis eiusdem quæ sic habet. Sit Ratio E F diuidenda per Rationem A B. Ducatur Antecedens A Rationis diuidentis, in Con-

A 4	E 9	C 27
B 3	F 6	D 24

sequentem F Rationis
diuidendæ, vt fiat D
Consequens Rationis
futuræ. Ducatur item

Consequens B in Antecedentem E; & fiat C. Dico Rationem C D, esse Rationem quæ inuestigatur, & esse Proportionem Rationis E F ad Rationem A B. Si.

F 2

enim acutiùs res attendatur; comperiemus hac operatione, hasce duas Rationes ad eundem Consequentem reduci, licet illius nulla fiat mentio. Fieret autem si præciperetur, ut Consequens B duceretur in Consequentem F, ut haberetur Consequens communis; ad quem, Ratio Antecedentis C, eadem foret, quæ E F; & Ratio Antecedentis D eadem quæ A B. Tunc verò duo termini C & D, quia eundem haberent Consequentem; essent denominatores Rationum E F, A B, & illarum habitudinem exponerent; ut ex dictis paulo ante clarum est.

P R O P. XVIII. DEFINIT.

Compositio Rationis est multiplicatio denominatorum seu quantitatum Rationum quotcumque, aliquam efficiens Rationem.

Hæc est compositionis Rationum definitio ab Euclide lib. 6. Defin. 5. totidem ferè verbis tradita. Cuius expositio non potest non esse clarissima; tot editis in Euclidem accuratissimis commentariis. Quæ etiam in parte Geometra suam non est passus operâ desiderari lib. 8. princ. 2. quorum omnium lucubrationes, super hac re consuli poterunt. Exemplum tantùm hic interim appono huiusmodi, plura paulo post producturus: vnde totum hoc compositionis negotium tam obscurum quam graue, euidenter declarabitur. Sit Ratio A 8 ad B 2, cuius denominator seu quantitas est C 4. Sit etiam Ratio D 6 ad E 3, cuius denomina-

tor

		G		
C	8	F		
4		2		
8.	2.	6.	3	
A	B	D	E	

tor est F 2. Multiplicen-
tur hi duo denominato-
res 4 & 2 vt fiat G 8, erit
8 denominator Rationis
compositæ ex Ratione
quadrupla 8 ad 2, vel
aliorum quorumcum-
que terminorum Rationem quadruplam obseruan-
tium; & ex Ratione dupla 6 ad 3, vel aliorum Ratio-
nis eiusdem terminorum. Quod si plures adhuc Ra-
tiones forent: multiplicaretur denominator 8 proxi-
mè inuentus per denominatorem Rationis tertiæ in-
sequentis; & haberetur denominator Rationis ex tri-
bus illis Rationibus compositæ: & ita de pluribus di-
cendum est.

Porro hæc compositio Rationum per multiplica-
tionem denominatorum facta; æquè haberetur, mul-
tiplicatis ipsis terminis vt Prop. 16. docui. Nam mul-
tiplicatis Antecedentibus 8 & 6 simul; & simul etiam
Consequentibus 2 & 3. Fient 48 & 6: Rationis verò
huius denominator est 8, vt patet, si iuxta ea quæ
Prop. 5. sunt exposita inquiratur, diuiso Antecedente
48 per Consequentem 6. Et hinc constat non esse
omnino necessarium ad Rationum hanc compositio-
nem vt denominatores inter se multiplicentur: sed
satis etiam esse, si ipsi Rationum termini inter se du-
cantur: habebitur enim peracta terminorum multi-
plicatione, quædam Ratio quæ dici debet composita,
ex Rationibus, quorum termini sunt multiplicati, &

F 3 cuius

cuius denominator oritur ex multiplificaone denominatorum ad singulas Rationes pertinentium.

PROP. XIX. PRINCIPIVM.

Duplex est Compositionis genus in Rationibus: Compositio presse seu specificè sumpta; & multiplicatio.

Hic mentionem non facio Compositionis illius Rationum: qua plures Rationes in vnam illis omnibus æqualem colliguntur per additionem iuxta Prop. 10. huius. Illius enim Compositionis negotiū ab hoc longe diuersum est, quod ductis in se Rationibus non sibi additis, absoluitur. Compositio ergo Prop. præcedenti definita genus est ad Compositionem presse sumptam, & multiplicationem. Compositio presse sumpta est quando Rationes Rationem aliquam componentes, vel per sui, vel per suorum denominatorum multiplicationem, sunt inter se dissimiles, vt in superiori exemplo duæ Rationes 8 ad 2, & 6 ad 3 Rationem octuplam componentes sunt dissimiles, vel earum denominatores 4 & 2 inæquales. Multiplicatio verò, vt Geometrarum institutum voluit, est Compositio Rationum similium siue æqualium: Quæ fit multiplicatis Rationibus quocumque æqualibus, deinceps quotquot extiterint; vel earum denominatoribus: quos tunc æquales esse necesse est. Vt si tres huiusmodi Rationes quorum termini duplam seruant Rationem ducantur in se, primò quidem ducta AB in
secun

A 4	C 6	E 10	G 240	. 2. 2. 2. 8
B 2	D 3	F 5	H 30	

secundam C D, vt fiat Antecedens 24. Ex Antecedentibus A & C ductis; & Consequens 6, ex Consequentibus B & D. Deinde iterum ductis terminis proximè repertis 24 & 6 in terminos E 10, & F 5 tertiæ Rationis, vt fiat Ratio G H. dicetur Ratio G H propriè & specificè multiplicata ex Rationibus illis tribus æqualibus; ex quibus generice dici debet composita. Denominator verò Rationis huius G H, oritur etiam ex denominatoribus singulis harum Rationum æqualium æqualibus in se ductis. Cum enim sint tres Rationes, & eæ duplæ. Denominator 2. Ter poni debet, & ita deinceps in se duci; vt tandem fiat 8 denominator Rationis G H compositæ ex illis tribus duplis Rationibus.

Iam verò huius generis multiplicationis Rationum, variæ sunt species: alia enim est quæ duplicatio dici debet: alia Triplicatio: alia Quadruplicatio, Quintuplicatio, &c. Duplicatio dicitur cum duæ Rationes æquales in se ducuntur: vt si ducantur Rationes A B, & C D in se per Prop. 16. Fiet Ratio 24 ad 6: & hæc Ratio dicetur duplicata Rationis A B, vel C D. Quia si Ratio A B bis ponatur & sic in se ducatur iuxta Prop. citatam, producet Ratio 16 ad 4 quæ multiplicata dici debet ex Ratione A B & A B, siue A B bis posita: & ideo 16 ad 4 illius duplicata dicitur. Sicut etiam

Ratio

Ratio 36 ad 9 quæ oritur ex Ratione CD in Rationem CD ducta; duplicata est tam Rationis CD quam Rationis AB; & aliûs cuiuscumque Rationis duplæ. Quod idem fieri contingit si denominator 2 Rationis duplæ bis ponatur & ita 2 in 2 ducatur vt fiat 4. Denominator enim 2 Rationis duplæ, est Ratio dupla in minimis terminis, vt Prop. 5. exposui; sed non exprimitur illius consequens qui est vnitas quam connotat. Exprimaturs igitur Ratio dupla in minimis terminis hoc modo 2 ad 1 hæc Ratio bis posita & multiplicata producet Rationem 4 ad 1 quæ duplicata dici debet Rationis 2 ad 1 & aliarum omnium Rationum similitum hoc est duplarum. Idem de triplicata, Quadruplicata, &c. Dicendum est.

PROP. XX. DEFINIT.

Compositio Rationum continua est quando termini Rationum qui in se ducuntur ad componendam Rationem sunt Consequentes vnus Rationis & Antecedentes alterius sequentis Rationis.

Siue Rationes sint similes siue dissimiles in eo conueniunt vt continuæ esse possint. Ecce continuas dissimiles A ad B sesquitercia C (qui idem est cum B) ad

A	8	C	6	E	3	vel	A	8	B	6	C	3	D	9
B	6	D	3	F	9									

D dupla : E idem cum D ad F subtripla. Vel continuentur

nuentur huiusmodi termini vt habet. Secundum schema: continuæ Rationes similes eodem modo se habent vt hoc alterum schema refert. In quo Antecedens

A 32 B 16 C 8 D 4				A ad B Consequentem habet Rationem duplam: B verò

factus Antecedens, ad Consequentem C Rationem etiam habet duplam, &c.

PROP. XXI. DEFINIT.

Progressio Geometrica est series plurium similium Rationum per continuos terminos extensa.

A 2	B 4	C 8	D 16	E 32
-----	-----	-----	------	------

Vt series hæc A, B C, &c. Duplæ Rationis, cuius termini sunt communes duabus Rationibus immediatis; quas quasi commune vinculum nectunt; cum sint Consequentes Rationis præcedentis, & sequentis Antecedentes: Progressio Geometrica dicitur; progressio quidem: quia eodem semper gradu, æquali scilicet Ratione extenditur: Geometrica verò, eo quòd insignis sit eius vsus in Geometricis, vel ad distinctionem progressionum aliarum.

G PROP.

P A R S II.
PROP. XXII. THEOR.

Si inter duas quantitates A & B mediæ quocumque C, D interponantur Ratio A ad B componitur ex Rationibus intermediis A ad C; C ad D: D ad B.

$$\frac{A \ 12, \ C \ 8, \ D \ 4. \ B \ 6}{\quad}$$

Theorema hoc habetur tanquam principium per se notum apud doctissimum Geometram nostrum, lib.8. princ.2. *Quod, inquit, obscurius quidem est, quam ferat principiorum natura; sed communi gregarioque Geometrarum vulgò: à quorum numero non ita me amo, ut me eximam, tenuis meæ suppellectilis satis conficiat. Illud igitur ut Theorema, mihi meique similibus demonstrandum propono. Suasit in primis tam libera duos inter terminos, alios quocumque, & quancumque Rationē inter se habentes collocandi facultas; ex quibus deinde nascatur Ratio extremorum; ita ut nullæ sint Rationes; ex quibus data Ratio componi non possit: quis assentiatur sine demonstratione? Deinde cum propositio hæc demonstrabilis sit, id est, medium habeat per quod syllogismus institui possit, cuius ipsa, sit conclusio: eadem sanè non est quoad se & per se primò nota. Quæ tamen conditio à Logicis requiritur, ut propositio aliqua in principiorum numerum exponatur. Et verò in eorum numerum istud ipsum ab Authore Quadraturæ non nisi ægre reponi videtur.*

Sic

Sic enim ait loco citato. *Quod principium etsi verissimum sit, & à magnis Geometris non semel usurpatum, non tamen usque adeò omnibus arridet, ut eius demonstrationem non requirant. Ego verò censeo cum omnibus Geometris tamdiu inter principia esse censendum, donec alicui ratio occurrat hoc ipsum Geometrica demonstratione inter Theoremata reducendi.* Reducetur ergo imposterum: En etenim tibi, peritissime Geometra, ad id necessariam illam demonstrationem.

Præparatio.

$$\overline{A \ 12. \ C \ 9. \ B \ 3. \quad D \ 108. \ E \ 27}$$

Inter duos terminos A & B medius C interiiciatur. Tum A ducatur in C, ut fiat D rectangulum: & C ducatur in B, ut fiat rectangulum E.

Demonstratio.

Ratio termini A ad terminum B est eadem quæ rectanguli D ad rectangulum E. Sed ratio rectanguli D ad rectangulum E componitur ex Ratione A ad C & ex Ratione C ad B. Ergo etiam Ratio A ad B componitur ex Ratione A ad C & Ratione C ad B.

Probatur maior. Nam terminus medius C ducitur tam in A, ut producat D; quam in B, ut producat E. Ergo vel per 1. lib. 6. vel per 17. lib. 7. (Ut scilicet idem argumentum tam continuæ, quam discretæ quantitati inferuiat) eadem est Ratio A ad B, & D ad E.

Minor verò, ex dictis superiùs Prop. 16. & Prop. 18.

G 2

Constat

Constat eidentissimè. Nam si quantitates siue denominatores Rationum A ad C; & C ad B in se ducantur: per citatas Prop. efficient Rationem compositam ex Rationibus A ad C, & C ad B. Sed siue denominatores Rationum, siue ipsi Rationum termini in se ducantur, eadem Ratio componitur, vt citato loco exposui. Ergo Ratio D ad E (quæ ostensæ proximè est eadem cum Ratione A ad B) quæ ex ductu terminorum A in C vt Antecedentem secundæ Rationis; & C vt Consequentis primæ Rationis, in B Consequentem Rationis secundæ orta est: Componitur ex Ratione A ad C, & Ratione, C ad B. Verùm ergo est propositum Theorema quando inter duos terminos medius vnicus interponitur. Sed æquè verùm est quando plures intercedunt.

Sint enim inter duos terminos A, & B, duo inter-

A	12	C	9	D	8	B	6
---	----	---	---	---	---	---	---

iecti, C & D. Probabitur primò ex proxima Ratiocinatione Ratio A ad D componi ex Ratione A ad C, & Ratione C ad D, quasi duo dati extremi termini forent A & D, inter quos solus C immittitur. Deinde duo extremi A & B assumentur, inter quos D solus positus est, nulla amplius habita Ratione termini C: & probabitur Ratio A ad B componi ex Ratione A ad D, & Ratione D ad B. Sed Ratio A ad D iam ostensa est componi ex Ratione A ad C, & C ad D. Ergo Ratio A ad B ex Rationibus A ad C, C ad D, & D ad B componitur.

componitur. Eodem modo Ratiocinandum foret, si plures quàm duo termini medij inter duos extremos statuerentur: ita vt verissimum sit Theorema propositum. Vnde verum etiam sit, minus aptè in numerum principiorum per se notorum reduci, cum reuera demonstraretur per medium, quod ipsum necdum immediatum est, cum pendeat ex propositionibus Euclidis citatis quæ & ipsæ demonstrantur adhuc per alia media ad principia magis accedentia.

PROP. XXIII. PROBL.

Sit data Ratio quæcumque A ad B. Quam oporteat in quotcumque Rationes æquales diuidere.

Superius Prop. 17. huius. Ostendi modum, quo Ratio quælibet per aliam datam Rationem diuidi possit: hic verò quæritur modus quo data Ratio diuidatur, non per datam Rationem; sed in datas Rationes: æquales quotcumque, qui sensus longe à priori est diuersus; & in hunc recidere videtur, vt ex dictis de compositione Rationis constat, scilicet, quæruntur Rationes æquales quotcumque, quæ datam Rationem A ad B componunt.

Constructio.

A 12,	B 3.	A 12,	C 6.	B 3

Data sit Ratio A ad B in duas Rationes æquales diuidenda.
G 3

uidenda. Reperitur inter duos terminos datos, medius terminus C Proportionalis per 13 lib. 6. in quantitate continua, in discreta verò idem præstandi modus colligitur ex 20. lib. 7. & passim apud Arithmeticos traditur. Ducatur scilicet terminus A in terminum B: & ex producto Radix quadrata eruatur C. Dico datam Rationē AB in duas æquales diuisam esse posito inter A & B medio termino C. Est enim A ad C, vt C ad B. Ergo Ratio A ad B est diuisa in duas Rationes æquales. Vel iuxta alterum problematis sensum, inuentæ sunt duæ Rationes æquales datam Rationem AB componentes, beneficio termini medij C inter duos terminos data Rationis interiecti. Quod si placeat animi gratiâ experiri per Prop. 17. quàm sit hæc peculiaris diuisio conformis illi, quam ibidem tradidi. Sic operare habitis termino, C & Ratione CB vel AC; diuide Rationem AB per alterutram, siue AC, siue CB. Ratio, quotientis loco, inuenietur AC aut CB; quæ indicabit Rationem AB, ita se habere ad Rationem CB. Vt se habet AB ad quotientem AC, vt verum est: cum duæ Rationes AC, & CB sint æquales.

Sed si eadem Ratio AB in tres vel plures æquales Rationes diuidenda foret. Duo medij termini, vel plures Proportionales essent reperiendi. In quo Geometria laborauit hætenus. Fœlicior hæc in parte Arithmetica extitit, præfertim si suis illis numeris surdis, imò, & cæcis vti liceat: quidni porro liceat? docet enim inter duos datos terminos, medios quotcumque Proportionales statuere; vt inter datos A 12 & B 3, duos

duos medios statuet C & D, hoc modo: A 12, C R cub. 432, D R cub. 108, B 3 eritque Ratio A B in tres æquales AC, CD, DB distributa: & ita de cæteris. Quare datam Rationem in quocumque æquales diuisi. Quod erat faciendum.

R R O P. XXIV. THEOR.

In omni progressionē Geometrica Ratio termini cuiuslibet in serie assumpti, ad primum terminum est multiplicata per Rationem secundi termini, ad eundem primum, toties quot Rationes numerantur à primo termino vsque ad terminum assumptum.

Demonstratio.

Propositio hæc non alia eget probatione quam expositione. Sit ergo progressio.

A 2	B 4	C 8	D 16	E 32	&c.
-----	-----	-----	------	------	-----

Et in eius serie terminus E conferatur ad primum terminum A. Dico Rationem E A multiplicari (in mentem reuocanda est hîc Propositio 19. eiusque sensus) per Rationem secundi termini B ad eundem primum terminum A toties sumptam; quot sunt Rationes à primo termino A vsque ad E. Quis ambigat? Ratio E ad A componitur ex Rationibus E ad D; D ad C, C ad B ac tandem B ad A per Prop. 22. Huius. Sed ex omnes sunt Rationes æquales, tum inter se, tum

tum primæ B ad A ; quot ergo Rationes numerantur
vsque ad E , toties Ratio E ad A dicenda est componi,
siue multiplicari, per Rationem B ad A. Quod erat
demonstrandum.

O B S E R V A T I O N E S.

A 2	B 4	C 8	D 16	E 32	F 64 &c.
-----	-----	-----	------	------	----------

Primò, constat ergo in superiori progressione in
exemplum allata , tertium terminum C ad primum A
Rationem habere duplicatam Rationis B A , secundi
scilicet termini ad eundem primum : componitur
enim Ratio C A , siue , vt magis propriè & specificè
loquar , multiplicatur per duas Rationes C B , B A
quæ cùm sint æquales , duplicatur B A ad componen-
dam Rationem C A. Eodem modo Ratio quarti
termini D , ad primum A , est triplicata Rationis B A :
cuius etiam quadruplicata erit Ratio quinti termini E
ad A : & ita deinceps.

Secundò, In eadem progressione Ratio quinti ter-
mini E , ad primum A , duplicata est Rationis tertij
termini C ad eundem terminum primum A. Nam tres
termini E , C , A , sunt continuè Proportionales , &
progressionem constituunt per Rationes æquales E C ,
C A. Ergo Ratio tertij termini E , ad primum A du-
plicata est Rationis secundi termini C ad eundem pri-
mum A. Vt paulò ante declaratum est.

Tertiò hinc patet quo sensu dicatur vna Ratio alte-
ram continere bis , ter , quater , &c. Per multiplicatio-
nem

nem vel in sensu multiplicationis. Vel illam multiplicare. Item quomodo vna Ratio alteram toties in sensu multiplicationis contineat, siue toties multiplicet: quoties hæc tertiam continet, vel multiplicat. Nam in allata progressionem Ratio CA, Rationem BA continet bis in sensu multiplicationis, siue bis multiplicat, hoc est, vno verbo, duplicat. Ratio EA eandem BA, quater multiplicat, siue quadruplicat, siue quater continet in sensu multiplicationis. Dicitur vero Ratio EA quinti termini ad primum, toties in sensu multiplicationis continere Rationem CA tertij termini ad primum: quoties Ratio hæc CA continet in eodem sensu Rationem BA secundi termini ad primum. Nam vt iam obseruavi, Ratio EA duplicata est Rationis CA eamque bis continet. Sed Ratio CA bis etiam continet Rationem BA, eiusque duplicata est. Ergo Ratio EA toties in sensu multiplicationis continet Rationem CA, quoties hæc continet Rationem BA.

Quartò, Ex iis quæ proxime attigi de cōtinentia Rationū in sensu multiplicationis, occasio se se offert idonea inquirendi, an alio in sensu, quam isto multiplicationis, vna Ratio alteram continere; totiesve continere, quoties hæc aliam continet, dici queat; & quomodo huiusmodi continentiæ inter se differant. Vnum enim istud caput, vel præcipuum fortassis est, quò tota hæc disputatiuncula referri debet, vt; suo loco monebo. Cui quæstioni respondeo: vt duplex genus Rationis componendæ obseruare licet, vnum per additio-

H nem,

nem , per multiplicationem ; alterum : ita est duplex continentia genus inter se valde diuersum : vnum per additionem , alterum per multiplicationem ; propterea enim compositum diuersum est , ita partes , quae vtrumque componunt , quaeque in eo continentur , diuersas esse necesse est. Repetatur hic progressio superior : cuius termini duplam Rationem obseruant.

A	2	B	4	C	8	D	16	E	32
---	---	---	---	---	---	---	----	---	----

Terminus eius E quintus ad primum A , Rationem habet Quadruplicatam Rationis B A , vt exposui supra , eamque continet quater in sensu multiplicationis. At in sensu additionis siue absoluto & simplici, Ratio E A Rationem B A octies continet , eiusque est octupla. Nam cum earum Rationum idem sit consequens A : ita se habent Rationes inter se per Prop. 7. Huius, vt Antecedentes E & B: quorum ille hunc continet octies. Hoc ergo primum esto horum duorum sensuum discrimen , insigne satis vt patet, sed ecce non leuius aliud

Secundum discrimen duplicis huius sensus , hoc est. Ostensum est Rationem E A , toties in sensu multiplicationis continere Rationem C A : quoties Ratio C A continet Rationem B A , hoc est bis. At in sensu simplici & absoluto. Ratio E A continet Rationem C A quater. Nam vtriusque est idem Consequens A : propterea iuxta Prop. 7. Huius. Ita se habent hae duae Rationes , vt Antecedentes E & C. At Ratio C A
haud

haudquaquam continet quater Rationem B A : Sed bis tantum ; sunt enim ita illæ etiam Rationes, vt Antecedentes inter se per citatam Prop.7. huius.

Tertium discrimen est, quod in sensu multiplicationis nulla obseruatur Denominatoris per quem progressio promouetur diuersitas. Siue is fuerit duplæ, triplæ aut aliûs Rationis : Imò etiam si minoris fuerit inæqualitatis : semper Ratio tertij termini ad primum dicetur bis continere Rationem secundi termini ad primum. At in sensu absoluto longe aliter se res habet. Mutatur enim Ratio terminorum, quoties progressio speciei mutationem patitur. Vt patet in hac duplici diuersæ speciei progressionē. In qua vtraque Ratio termini tertij C ad primum A, dici debet bis in sensu

A 2	B 4	C 8	multiplicationis continere Rationem B A. At in sensu absoluto, Ratio C A in prio- re progressionē continet Rationem B A bis. Et in posteriore progressionē, C A eandem B A ter continet. Denique in sensu absoluto & simplici, vt vna Ratio alteram continere dicatur ; necesse est vt maior ipsa sit ; quam ea quæ contineri di- citur. In sensu verò multiplicationis, id nullo modo necessarium est : cum in Ratione minoris inæqualita- tis contrarium semper contingat. Sit enim progressio per Rationes minoris inæqualitatis extensa A, B, C &c. A 8, B 4, C 2. Ratio C ad A, duplicata est Rationis B ad A, & hanc illa bis continet in sensu multiplica- tionis, licet re vera minor sit. Cum enim vtriusque sit
A 3	B 9	C 27	

H 2 idem

idem Consequens A: Ratio C A ad Rationem B A, ita se habet vt Antecedens C ad Antecedentem B, per Prop. 7. Huius. Sed C ad B habet Rationem subduplam: Ergo etiam in subdupla Ratione est, Ratio C A comparata ad Rationem B A. Nec C A in sensu absoluto vllomodo dici potest continere Rationem B A; in sensu tamen multiplicationis eam bis continere dicenda est.

Hæc de Continentia Rationum mutua hic annotata, quemadmodum & quæ Corollario Propositionis 11. tradidi, sunt accuratè obseruanda, tum quia Rationum per se satis obscurum & tale apud Geometras semper habitum negotium illustrent satis clarè, tum quia maximè necessaria futura sunt ad plurimas lib. 10. Authoris huius Propositiones intelligendas præsertim 44. tantæ obscuritatis, quantæ grauitatis ad eius meumque institutum vt libro 2. Prop. 47. patebit.

P R O P. XXV. T H E O R.

Si ab eodem primo termino A, duæ progressionis instituantur A, B, C, D, E; & A, F, G, H, L; duo tertij termini C, & G habent Rationem duplicatam Rationis duorum secundorum B, F: termini verò D, H quarti loci triplicatam. Quinti demum loci termini E, L quadruplicatam eiusdem, & sic deinceps.

Demon

Demonstratio.

	B 2	C 4	D 8	E 16
A 1				
	F 3	G 9	H 27	L 81

Quod ad Quantitatem Continuum pertinet : hanc propositionem demonstrat Geometra noster lib. 2. Prop. 27. Deducitur quoad numeros ex Propositione 10. lib. 8. Euclidis, quæ & ipsa Quantitati Continuæ leui opera accommodari posset. Vniuersaliter eam propono, eaque ad institutum meum vtor. Si ab aliquo termino A duæ series terminorū continuè Proportionaliū A, B, C, &c. AFG, &c. Quot inter singulos terminos eiusdem loci, & primū terminum A cadunt termini medij: tot inter ipsos assumptos in vtraque progressionē terminos medij cadent Proportionales. Verbi gratia, inter terminos B, F, & A, nullus medius Proportionalis est terminus: Ergo inter B & F, nullus medius terminus cadet. At verò quia inter terminos C, G tertij loci & terminum A, vnus medius terminus, in vtraque serie, scilicet B & F, interiicitur: vnus etiam medius Proportionalis cadet inter C & G. Eodem modo de cæteris ratiocinare cum Euclide. Hoc posito, Propositio allata sic concluditur. Ratio CA, & GA, Rationis BA, & FA duplicata est per Prop. 24. huius. Sed inter C & G vnus medius cadit terminus Proportionalis; & quidem in eadem Ratione in qua sunt termini B, F primo termino A proximi. Vt ex

H 3 Euclidis

Euclidis discursu constat. Ergo Ratio C ad G duplicata est Rationis B ad F. Parique iure Ratio D ad H eiusdem Rationis B ad F, erit triplicata. Ratio E ad L quinti loci, Quadruplicata: & ita deinceps. Ergo si ab eodem termino &c. Quod erat probandum.

P R O P. XXVI. P R O B L.

Duabus datis Rationibus tertiam Rationem Proportionalem exhibere.

Constructio.

Sint datæ duæ Rationes A 12 ad B 3; & C 8 ad D 6: quibus tertia Ratio Proportionalis adiungenda est.

A 12	C 8	E 64	G 192	G 4
				vel
B 3	D 6	F 36	H 432	H 9

Ducatur Ratio secunda CD in se, vt fiat Ratio E 64 ad F 36. Hæc diuidatur per primam Rationem AB, quæ diuisio breuissimè instituetur iuxta obseruationem ad Prop. 17. allatam: si B 3 ducatur in E 64 vt fiat G 192 Antecedens Rationis futuræ. Cuius Consequens habetur, ducto A 12 Antecedente in F 36 Consequentem, vt fiat H 432. Dico ergo Rationem G 192 ad H 432, vel terminis ad minimos reductis, G 4 ad H 9, esse tertiam proportionalem ad duas datas Rationes AB & CD.

Demon

Demonstratio.

Solutionis huius facillimæ clara est Ratio ex eo quod eadem Ratio producat per multiplicationem mediæ Rationis C D in se : quæ producitur per multiplicationem duarum extremarum A B & G H in se inuicem. Ratio enim A B ducta in G H non potest non restituere Rationem E F, quam diuisit. Sed eadem E F Ratio producta est per multiplicationem C D in se : vt habet constructio.

Aliter.

Vt hæc mea methodus euidentius certiùsque constet : iuuat idem problema paulò aliter soluere adhibita in numeris Ratione quam in lineis vsurpauit Geometra. Sic ergo eodem seruato schemate operabimur.

A	12	C	8
B	3	D	6

Duobus terminis C 8 & D 6, tertius proportionalis inueniatur $E 4\frac{1}{2}$. Deinde fiat vt C 8 ad $E 4\frac{1}{2}$, ita A 12 ad aliud, quod

$$\left| C 8. D 6. E 4\frac{1}{2} \right| C 8. E 4\frac{1}{2} A 12 F 6\frac{1}{4} \left| \right.$$

fit $F 6\frac{1}{4}$. Erit Ratio B 3 ad $F 6\frac{1}{4}$ tertia proportionalis duabus datis Rationibus A B, C D.

Demonstratio.

Ex iis quæ de Rationum compositione superius tradidi,

didi, clara euadit huius operationis methodus: vt propterea in hunc locum problema hoc, sicut & quod proximè sequitur, reiecerim; quod alioqui alium ordinem poscere videretur. Cum igitur præcipio vt duobus terminis C & D secundæ Rationis, tertius E proportionalis inueniatur: vt habeatur Ratio termini C primi ad tertium E: nihil inquirō nisi Rationem, quam Ratio C D. in se ducta producit: qualis fuit Ratio E F in præcedenti solutione. Sicut enim Ratio termini C ad E est duplicata Rationis C ad D, eò quod sint tres termini C, D, E continuè proportionales: ita etiam Ratio E F in superiori schemate est eiusdem Rationis C D duplicata per I. lib. 8. Euclidis. Quadrati enim numeri E F duplicatam habet Rationem laterum siue Radicum C, D. Ergo etiam Ratio A ad F, cum eadem sit ex constructione cum Ratione C ad E, est duplicata Rationis C ad D. Id est, eadem est cum Ratione producta per multiplicationem Rationis C D in se. Quod cum ita sit & inter terminos A & F interponatur medius terminus B: erit Ratio A ad F composita ex Rationibus A ad B, & B ad F: atque adeò Ratio A F diuisa per Rationem A B producit Rationem B F. Est ergo B F tertia Ratio proportionalis: eadem planè cum Ratione E F superiori solutione inuenta. Eadem enim ostensæ sunt Rationes E F superior, & Ratio A F huius solutionis: & vtraque per eandem Rationem A B diuiditur. Ergo Rationem B F hic inuentam, eandem esse necesse est cum Ratione E F superius exhibita. Quod idem numeri ipsi inuenti confirmant. Tertiam ergo

ergo Rationem datis duabus Rationibus proportionalem exhibui. Quod erat probandum.

PROP. XXVII. PROBL.

Inter duas Rationes A B, C D mediam Rationem proportionalem constituere.

Constructio.

Ostendi superius Prop. 23. huius. Quomodo Ratio quaelibet data, diuidenda sit in duas aut plures Rationes æquales. Hoc verò problemate quæritur modus tantum, si rem paulò acutiùs perpendamus, diuidendi datam proportionem in duas similes, vel, quod idem est, in duas æquales proportionem. Ratio enim siue habitudo Rationis A B ad Rationem C D iuxta Prop. 3. huius. Proportio est. Quæ in duas æquales proportionem diuisa fuerit si quædam media Ratio inter Rationes A B, C D posita fuerit proportionalis; id est, eiusmodi, vt proportio inter Rationem A B & ipsam, similis sit vel æqualis proportioni, quæ intercedet inter hanc eandem, & Rationem C D. His ita declaratis, operationem instituemus in hunc modum adhibitis numeris more nostro, quando hoc opusculum totum numerica Ratione exponere institutum est.

Ratio A 9 ad B 8 multiplicetur iuxta Prop. 16. huius. Per Rationem C 4 ad D 2. Fiet Ratio E 36 ad F 16.

I

Eruatur

A 9	C 4	E 36	G 6	vel	G 3
B 8	D 2	F 16	H 4		H 2

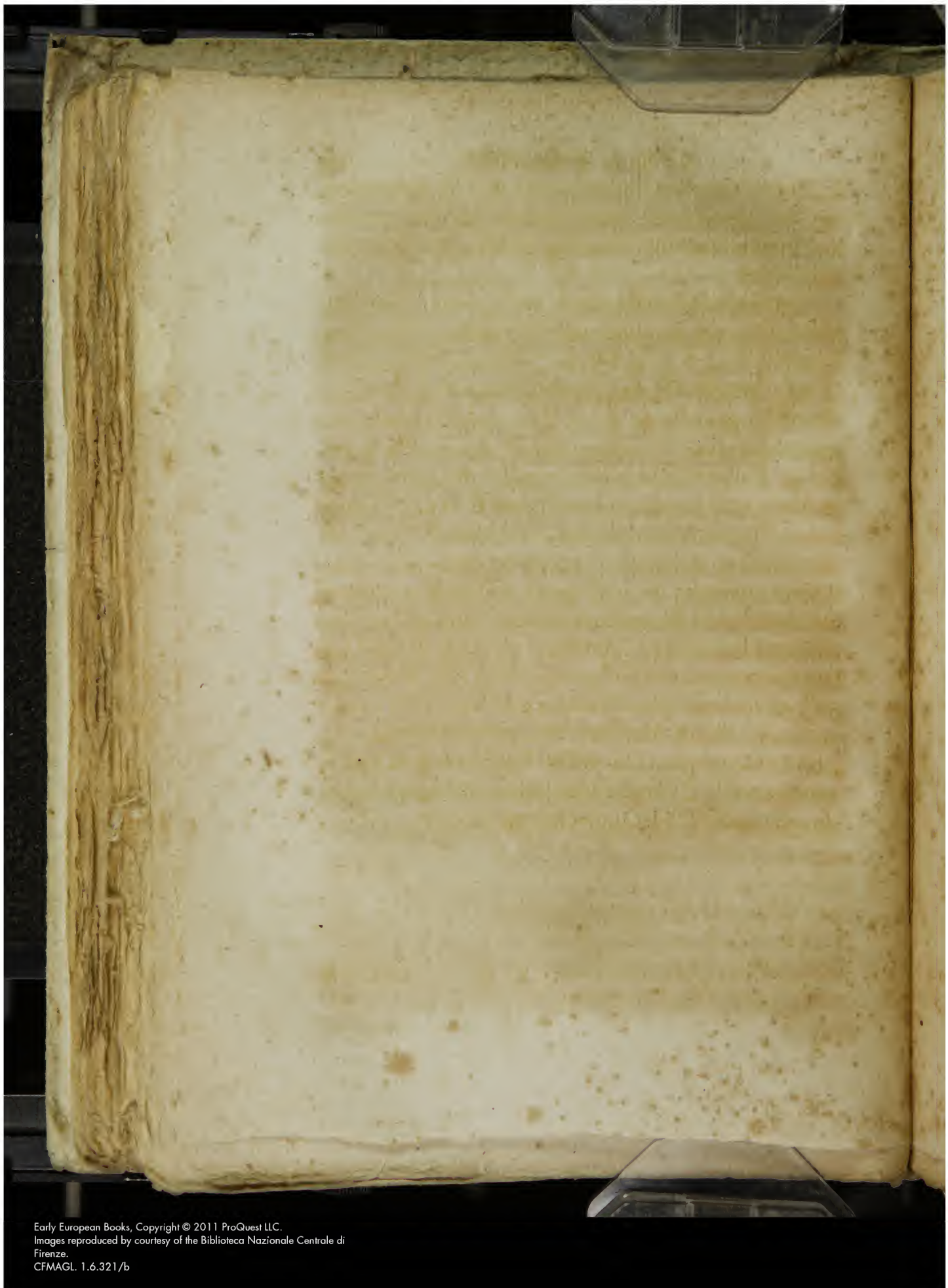
Eruatur ex terminis E & F Radix Quadrata. Erit illa Radix G 6 & H 4. Horum ergo terminorum 6. 4. vel 3. 2. Rationem dico esse mediam proportionalem inter datas Rationes A B, C D, hoc est, iuxta expositionem paulò ante allatam: Dico proportionem Rationum A B, C D in duas proportiones æquales A B, G H, & G H, C D diuisam esse.

Demonstratio.

Cum proportio Rationis A B, ad Rationem C D, Rationis species quædam sit, (est enim Ratio Rationum duarum) & inter terminos A B primum, & C D. Secundum Rationis illius, medius terminus statuatur Ratio G H: componetur proportio Rationis A B ad Rationem C D, ex proportionem Rationis A B ad Rationem G H. Et ex proportionem Rationis G H ad Rationem C D, iuxta Propos. 22. huius. Ostendendum itaque tantum restat, duas illas proportionem esse æquales. Quod ita colligitur. Ratio media G H in se ducta producit Rationem E F (est enim G H Radix quadrata Rationis E F) quam eandem produxere Rationes A B, C D in se ductæ ex constructione. Ergo Ratio G H est media proportionalis inter Rationes A B, C D. Tanquam G H vnicus foret simplex terminus inter duos simplices A B, & C D

C D vnus simplicis Rationis, cuius A B sit Antecedens & C D Consequens: quæ diuidatur per Prop. 23. huius. In duas Rationes æquales medio interposito termino G H.

Quod vt euidentius pateat reducantur termini harum Rationum ad alios, itavt sit omnium idem Consequens: Erit A 9 & B 8: at C erit 16 & D iterum 8. Si ergo omiſſis Consequentibus B 8 & D 8. Soli spectentur Antecedentes A 9 & C 16, qui sunt Rationum quantitates siue denominatores, vt docetur Propos. 7. huius. Eorum Ratio in duas æquales diuidetur, interposito medio termino proportionali G 12 per Prop. 23. huius. Qui terminus habetur, vt ibidem traditur, ductis inuicem A 9 & C 16; & ex producto 144, eruta Radice quadrata 12; ad quem medium terminum, eandem habet Rationem primus 9 quam ipse medius deinceps habet ad 16. At eadem est Ratio horum Antecedentium 9. 12. 16. Quorum idem est Consequens 8. Quæ est inter ipsas Rationes 9 ad 8, 12 ad 8, 16 ad 8 per Prop. 7. huius. Siue inter Rationes illis æquales A 9 ad B 8: G 6 ad H 4: C 4 ad D 2. Ergo inter duas Rationes datas A B, C D rectè interposita est Ratio proportionalis media G H. Quod erat præstandum.





LIBER SECVNDVS.

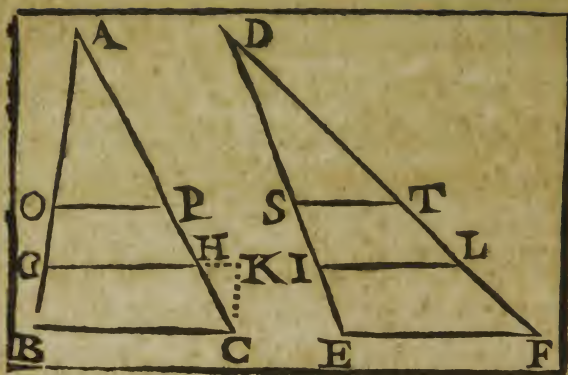
In quo primæ Quadraturæ
examen instituitur
& absoluitur.

PROP. I. THEOR.

Si duo triangula ABC , DEF æqualibus
Basibus BC , EF insistant: latera verò AB , DE si-
militer secentur in G & I : & per G & I agan-
tur lineæ GH , IL Basibus Parallelæ. Dico GH ,
 IL æquales esse.

Demonstratio.

Vt AB , ad AG ; ita ex hypothesi DE ad DI . Sed *Fig. 1.*
vt AB ad AG , ita BC ad GH per 4. lib. 6. Ergo vt
 DE ad DI , id est per eandem Prop. EF ad IL : ita BC
ad GH . Sed BC , EF sunt æquales. Ergo per 14. lib. 5.
I 3 æquales



æquales etiam sunt GH , IL . Quod erat demonstrandum.

R R O P. II. THEOR.

Si duæ lineæ parallelæ BC , GH , inæquales inter se, duabus lineis parallelis EF , IL æquales fuerint singulæ singulis. Quarum utrarumque extrema iungantur lineis BG , CH ; & EI , FL , conuenient iunctæ lineæ; & similiter secabuntur in G & I , vel H & L .

Preparatio.

Fig. 1. Poducatur GH , vt fiat GK , æqualis BC & iungatur CK .

Demonstratio.

Erit CK iungens duas æquales lineas & parallelas GK & BC ; æqualis & parallela lineæ BG per 33. lib. I. Atque

Atque adeò anguli duo GBC , BCK æquales erunt duobus rectis per 29. lib. I. Ergo duo GBC , HCB minores erunt duobus rectis. Lineæ ergo BC , CH productæ conuenient per 13. A XI. lib. I. Pari modo conuenient productæ lineæ EI , FL ; conueniant illæ in A , istæ in D . In triangulis igitur ABC , DEF , ita est AB ad AG , vt BC ad GH : & DE ad DI , vt EF ad IL ; hoc est, vt BC ad GH ; atque adeò, vt AB ad AG . Similiter ergo secantur AB , DE , in G & I ; & AC , DF ; in H , & L . Quod erat probandum.

PROP. III. THEOR.

Si duo Trapezia GC , IF . Oppositis duabus lineis GH , BC ; & IL , EF parallelis, & æqualibus contenta, æqualia sint. Dico vtriusque eandem esse altitudinem. Quod si vtriusque eadem ponatur altitudo. Dico ambo esse inter se æqualia.

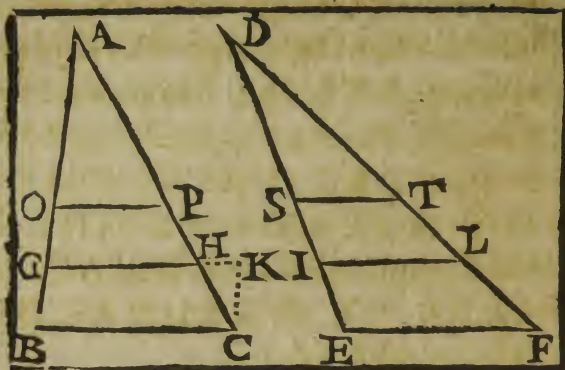
Præparatio.

Producantur latera reliqua Trapeziorum, nempe BG , CH donec conueniant in A (conuenient enim per Prop. præcedentem) & EI , FL , donec etiam concurrant in D .

Demonstratio.

Per Prop. præcedentem latera AB , DE triangulorum ABC , DEF , similiter secantur in G & I . Ergo per 22 lib. 6. Vt triangulum ABC , super primam AB quatuor

Fig. 1.



quatuor proportionalium, ad triangulum AGH simile super secundam AG . Ita triangulum DEF super tertiam DE ; ad triangulum DIL simile super quartam DI . Ergo Diuidendo. Vt Trapezium BH , ad triangulum AGH : ita Trapezium EL ad triangulum DIL . Sed Trapezium BH æquale est Trapezio EL ex hypothesis. Ergo per 14 lib. 5. etiam triangulum AGH , æquale est triangulo DIL . Quorum triangulorum cum æquales sint ex hypothesis bases GH, IL : in eadem erunt altitudine. Sed æqualia etiam sunt triacula ABC, DEF (adiectis nimirum Trapeziis æqualibus) super æquales bases BC, EF . Ergo & horum triangulorum æqualis erit altitudo. Si igitur ab hac vtraque altitudine æquali, dematur altitudo æqualis triangulorum AGH, DIL : remanebit altitudo Trapeziorum GC, IF æqualis. Vt habet prior pars propositionis.

Secunda verò pars, quæ prioris est conuersa, ita probatur. Facta constructione, conueniunt BG, CH latera

latera Trapezij GC producta, in A : & latera EI , FL Trapezij IF producta, in D : & præterea similiter secantur latera AB , DE , in G , & I . Ergo ita est triangulum ABC super primam AB quatuor proportionalem, ad triangulum simile AGH super secundam AG : sicut triangulum DEF super tertiam DE ad triangulum simile DIL super quartam DI .

Et Permutando. Ita est triangulum ABC ad trian- Fig. 1.
gulum DEF : ut triangulum AGH ad triangulum DIL . Sed ut triangulum ABC ad triangulum DEF : ita est altitudo trianguli illius ad huius altitudinem, cum eorum bases BC , & EF ponantur æquales; Et propter eandem rationem: ita est triangulum AGH ad triangulum DIL : ut illius altitudo ad huius altitudinem, propter bases GH , IL æquales. Ergo cum sit ut tota altitudo trianguli ABC ; ad totam altitudinem trianguli DEF ; ita ablata altitudo trianguli AGH ; ad ablatam altitudinem trianguli DIL . Erit reliqua altitudo, Trapezij scilicet GC , ad altitudinem reliquam Trapezij IF : ut tota ad totam; & ut ablata etiam ad ablatam per 19. lib. 5. Sed altitudo Trapezij GC æqualis est altitudini Trapezij IF ex hypothesi. Ergo tam altitudo trianguli ABC , altitudini trianguli DEF ; quam altitudo trianguli AGH , altitudini trianguli DIL , æqualis est. Sed basis BC basi EF , & basis GH basi IL , ponuntur æquales. Ergo tam triangulum ABC triangulo DEF ; quam triangulum AGH , triangulo DIL æquale est per 1. lib. 6. Si ergo ab æqualibus triangulis ABC , DEF , demantur triangula

K æqualia

æqualia $A G H$, $D I L$, æqualia remanebunt Trapezia $G C$, $I F$. Vt habet secunda pars propositionis. Si ergo duo Trapezia, &c. Quod erat concludendum.

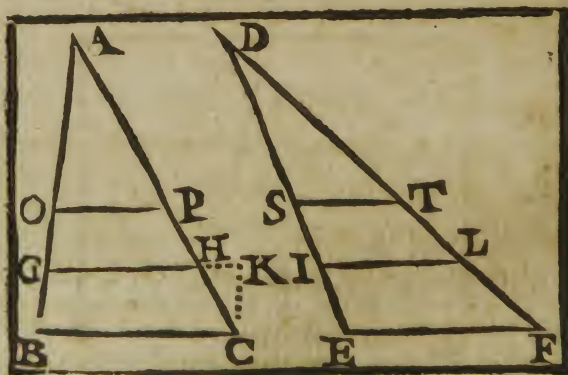
PROP. IV. THEOR.

Si duo Trapezia $O C$, $S F$; duobus lateribus parallelis $O P$, $B C$; & $S T$, $E F$ constent; quorum vnum $O P$, vni $S T$: alterum $B C$, alteri $E F$ sit æquale: & secentur alia duo eorum latera $O B$, $S E$ similiter in G & I : per quæ puncta ducantur $G H$, $I L$ parallelæ lineis $B C$, $E F$. Dico parallelas $G H$, $I L$ æquales esse.

Preparatio.

Producantur $B O$, $C P$; & $E S$, $F T$ donec illæ in A , istæ in D concurrant (concurrent enim per Prop. 2. huius.)

Figura prima.



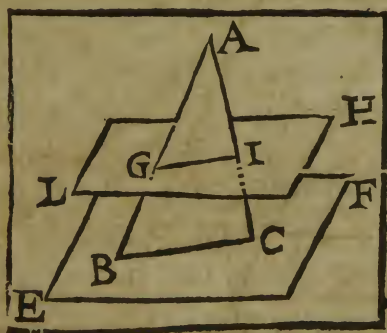
Demonstratio.

Fig. 1. In triangulo $A B C$, cum $O P$ sit basi $B C$ parallela; ita est $A B$ ad $O B$; vt in triangulo $D E F$ linea $D E$ ad $S E$.

SE. Per Prop. 2. Huius. Sed vt OB ad GB; ita est ex hypothefi SE ad IE. Ergo ex æquo, vt AB ad GB; ita est DE ad IE. Et Conuertendo AB ad AG vt DE ad DI. Sed vt AB ad AG; ita est BC ad GH: & vt DE ad DI; ita EF ad IL. Ergo ita est BC ad GH; vt EF ad IL. Sed BC & EF sunt æquales. Ergo & æquales erunt GH, IL. Per 14. lib. 5. Quare si duo Trapezia, &c. Quod erat probandum.

PROP. V. THEOR.

Si à sublimi puncto A, in subiectum planum EF, rectæ lineæ quæcunque & quotcunque, vt AB, AC demittantur. Ducatur verò planum LH plano FE parallelum, lineas AB, AC secans in G & I. Dico lineas AB, AC similiter secari in G & I.

Figura Secunda.*Preparatio.*

Iungantur tam puncta B, C; quam puncta G, I, rectis lineis BC, GI. *Fig. 2.*

K 2

Demon

Demonstratio.

Triangulum ABC per 2. lib. 11. in vno est plano sed illud planum secatur duo plana parallela EF, LH . Ergo sectiones communes producit BC, GI parallelas per 16. lib. 11. Ergo trianguli ABC latera AB, AC secta sunt proportionaliter in G & I . eadem est reliquarum linearum à puncto A ad idem planum demissarum Ratio. Quare si à sublimi &c. Quod erat probandum.

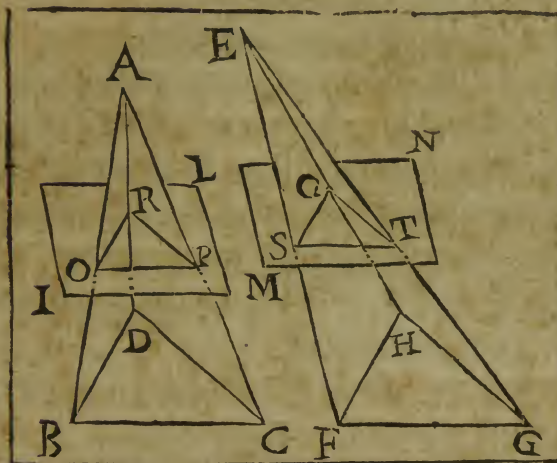
P R O P. VI. T H E O R.

Si Pyramides triangulares, quarum vertex A , & E ; bases BDC, FHG æquales habeant & similes. Secentur autem planis IL, MN basi parallelis, quæ latera Pyramidum similiter secant in $O, R, P; S, Q, T$. Dico communes sectiones ORP, SQT , esse triangula æqualia & similia.

Demonstratio.

Fig. 3.

Plana IL, MN sunt ex hypothesi, Pyramidum basibus parallela. Ergo per 16. lib. 11. communes sectiones eorum planorum cum singulis triangulis Pyramidem continentibus, sunt parallelæ singulis triangulorum basibus. Quare OP parallela est basi BC trianguli ABC : & ST parallela basi FG trianguli EHG . Et ita de cæteris triangulis. Quia verò ex hypothesi, latus AB trianguli ABC ; & latus EH trianguli

Figura Tertia.

guli $EFHG$, secantur similiter in O & S . Erunt æquales lineæ OP & ST per Prop. I. huius. Pari modo æquales erunt OR , SQ ; & PR , TQ . Ergo per 5. lib. 6. triangula ORP , SQT æqualia sunt & similia inter se. Quod erat probandum.

PROP. VII. THEOR.

Eadem facta suppositione. Positis scilicet duabus Pyramidibus $ABDC$, $EFHG$ triangularibus: quæ basibus æqualibus & similibus BDC , FHG insistant. Sectis etiam earum lateribus similiter in O & S , vel in R & Q , aut in P & T per plana IL , MN basibus parallela. Dico ipsas etiam Pyramides per eadem plana similiter secari.

K 3

Demon

Demonstratio.

Fig. 3.

Cum planum secans IL parallelum sit basi Pyramidis BDC : abscindet Pyramidem $AORP$. Similem toti Pyramidi $ABDC$. Per Definit. 9. lib. 11. Siquidem plana omnia Pyramidem vnā continentia similia sunt planis omnibus alteram continentibus. Similiter Pyramis ESQ Tabscissa similis est toti Pyramidi $EFHG$. Ergo Pyramis $ABDC$ ad Pyramidem $AORP$. Triplicatam Rationem habet lateris AB , ad latus homologum AO per 8. lib. 12. Sed vt AB ad AO ; ita est ex hypothesi EF ad ES . Ergo Pyramis $ABDC$, ad Pyramidem $AORP$ habet triplicatam Rationem lateris EF ad ES . Sed Pyramis $EFHG$ ad Pyramidem $ESQT$, habet etiam triplicatam Rationem lateris EF ad ES . Ergo ambæ Pyramides $ABDC$, $EFHG$ similiter secantur à planis IL , MN quæ similiter secant latera Pyramidum. Quod erat probandum.

Corollarium.

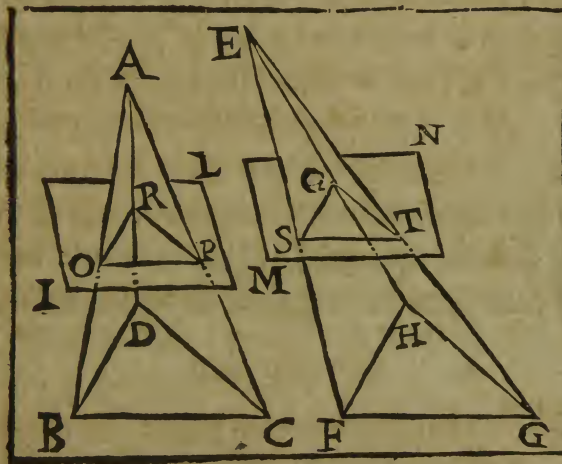
Hinc fit seruata eadem hypothesi, vt truncatæ Pyramides, inter bases, & plana secantia interceptæ, etiam sint ad totas Pyramides suas, proportionales; & Permutando. Vt Pyramis ad Pyramidem; ita truncata Pyramis ad Pyramidem truncatam. Quò fit vt si Pyramides sint æquales; æquales etiam futuræ sint huiusmodi truncatæ Pyramides.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.

Duo triangula BDC, ORP similia in situ parallelo similiter ponantur. Sit verò ORP altero minus. Si bini & bini anguli æquales B, O: D R; C, P, lineis rectis connectantur. Dico has omnes lineas productas ad vnicum punctum A concurrere, ad partes minoris trianguli: & Pyramidem efformaturas.

Figura Tertia.



Demonstratio.

Duæ lineæ BC, OP sunt parallelæ. Et OP minor *Fig. 3.* est ex hypothesi quam BC. Ergo iunctæ lineæ BO, CP, si producantur, coibunt ad partes lineæ OP per Prop. 2. huius. verbi gratiâ in puncto A. Rursus quia in triangulo ABC, ducta est OP, basi BC, parallela: erit

AB

AB ad AO, ut BC ad OP. Sed ut BC ad OP; ita est BD ad OR, (eo quod duo triangula BDC, ORP, similia ponantur.) Ergo ita est BD ad OR, ut AB, ad AO. Si igitur DR producat transibit per A. Atque ita fient tria triangula ABC, ABD, ADC; quæ super basi BDC, constituta, colliguntur ad punctum A, & Pyramidem formant. Quod erat probandum.

PROP. IX. THEOR.

Si duæ Pyramides basi Polygonæ, æquali & simili insistant (cuiusmodi sunt Pyramides tetragonæ ABCDE, FGHI) quarum latera secantur similiter in M, N, I, L; & P, R, T, V à planis ML, PV basibus parallelis. Dico figuras à planis secantibus factas nempe MILN, PTVR esse æquales & similes.

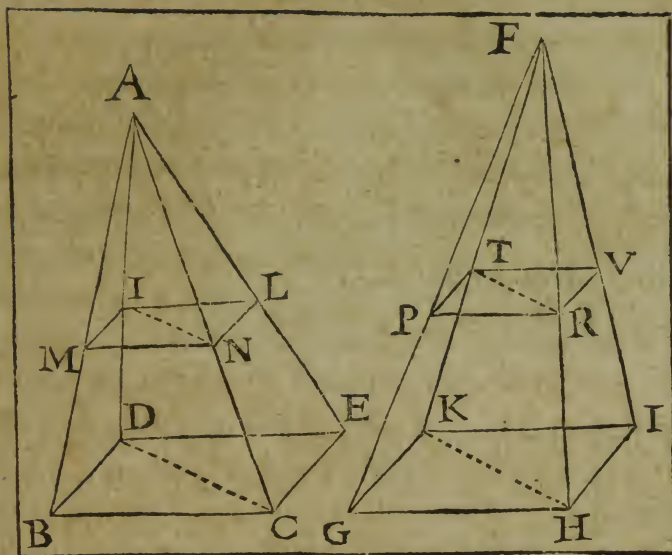
Præparatio.

Fig. 4. Ducantur lineæ DC, KH distribuentes Pyramidum bases in triangula inter se æqualia & similia & similiter posita: qualia sunt BDC, GKH; & DCE, KHI. Intelligantur verò per lineas DC, KH & Pyramidum vertices AF; extendi plana Pyramides polygonas in duas Pyramides distribuentia.

Demonstratio.

Cum ergo duæ pyramides triangulares ABDC, & FGKH, æquali basi & simili BDC, GKH insistant. Secentur verò earum latera AB, FG, similiter in M &

Figura Quarta.



& P à planis ML, PV basi parallelis: erit per Prop. 6. huius. Triangulum MIN, æquale & simile triangulo PTR. Eodem modo triangulum alterum ILN, erit æquale & simile triangulo TVR, & similiter positum. Ex quibus triangulis æqualibus, similibus, & similiter positis formatur figura polygonæ MILN æqualis & similis figuræ polygonæ PTRV. Quæ demonstratio in pyramidibus tetragonis allata, cum vim eandem obtineat in quibuscumque polygonis: patet quod si duæ pyramides polygonæ, &c. Quod erat probandum.

PROP. X. THEOR.

Facta eadem suppositione. Dico ipsas pyramides polygonas similiter secari à planis ML, PV.

L

Demon

Demonstratio.

Fig. 4. Distributis basibus in triacula æqualia & similia: nempe BDC, DCE; & GKH, KHI, atque tota pyramide polygona in pyramides triangulares. Probantur pyramides triangulares binæ & binæ similiter secari per Prop. 7. Huius. Per plana similiter secantia pyramidum latera. Ergo per 12. lib. 5. totæ ipsæ pyramides similiter secabuntur. Quod erat probandum.

PROP. XI. THEOR.

Fig. 4. Si duæ figuræ polygonæ BDEC; & MILN similes in situ parallelo similiter ponantur; sit verò prior figura maior posteriore: & bini, & bini earum anguli B, M; D, I, &c. Lineis rectis connectantur. Dico has omnes lineas productas ad vnicum punctum A concursuras ad partes minoris figuræ, & pyramidem polygonam efformaturas.

Demonstratio.

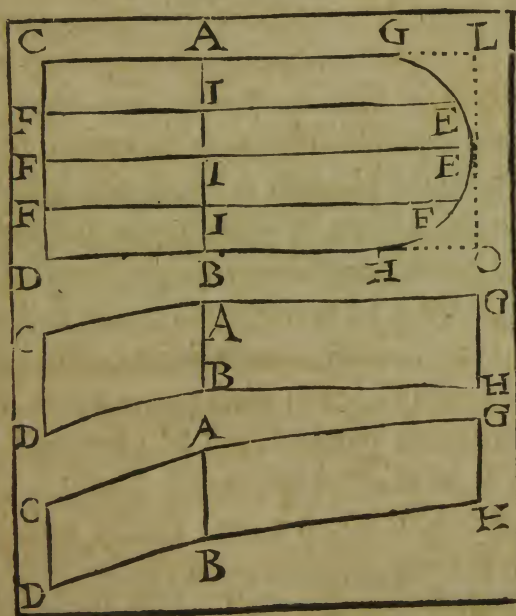
Quod Prop. 8. de pyramide triangulâri asserui: hic de qualibet polygonâ pyramide asserendum probo: idque repetita illius propositionis demonstratione. Si enim utraque hæc figura polygonâ BDEC, MILN in triacula similia dissoluatur. Fient multæ pyramides triangulares per citatam Prop. 8. Quæ vnicam pyramidem polygonam componunt. De qua verè asseritur; quidquid de singulis asserabatur.

PROP.

PROP. XII. DEFINIT.

Ductus plani in planum, est corporis, siue solidi alicuius efformatio: quæ absoluitur dum planum aliquod alteri plano ad rectos angulos insistens supra eiusdem basim; in eo situ fluere per ipsum concipitur, donec eiusdem terminum oppositum attigerit. Siue, est corporis efformatio, quæ fit dum plani recti ad alterum planum, lineæ omnes in omnes lineas substrati plani ducuntur.

Figura Quinta.



EXPOSITIO.

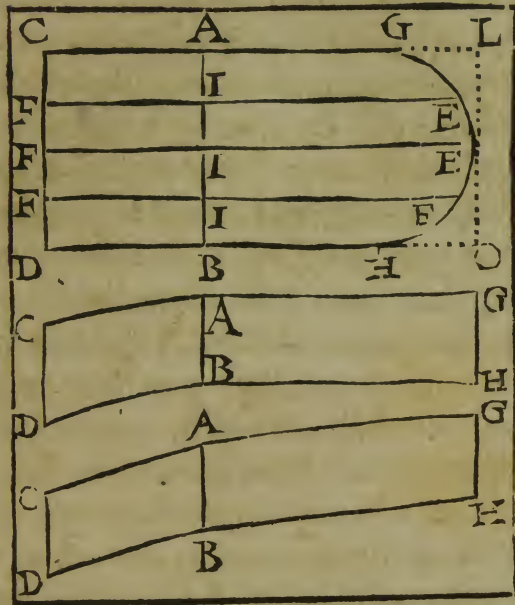
Noua est hæc de mutuo planorum ductu doctrina, Fig. 5.

L 2 soler

solertissimè à summo vbique Geometra nostro adin-
uenta & fusissimè explanata toto libro septimo operis
sui Geometrici. Vnde miras corporum variorum inter
se comparationes & inauditas æqualitates; atque ip-
sam adeò suam circuli Quadrandi Rationem colligit.
Quam, cum mihi planam facere & perspectam, hac,
animi gratia, exercitatione suscepta, proposuerim;
haud dubium quin quædam in hac noua Geometria
obseruanda fuerint; quæ paucis expediam.

Sint ergo duo plana $A C D B$. $A G E H B$: quorum
bases sint æquales; atque adeò aptæ vt in vnâ coïre
possint, qualis est $A B$. circa quam planum $A D$ con-
uertere intelligatur, donec supra substratum planum $A H$
rectum sit. Tum in eo situ, æquabiliter hoc est, æquali
omnium partium suarum motu; siue, basi sua $A B$
Fig. 5. fluente semper parallelâ lineæ $A B$, vnde discessit, ferri
concipiatur super planum $A H$, donec ipsum totum
percurrerit; ita tamen vt earum eius partium motus
cesset, quæ priores terminum suum fuerint assecutæ.
Vt quia planum $A H$ in orbem $G E H$ clauditur: sunt-
que partes eius circa E , remotiores à principio motus
 $A B$; quam circa G & H : Ideò partes plani $A D$ fluen-
tis, vbi attigerint partes G vel H viciniore, moueri
desinant: dum aliæ ad metam E longius distantem
contendunt. Nisi etiam mauis totum ipsum planum
 $A D$ moueri semper donec partes plani $A H$ remotis-
simas excesserit, eiusque basis locum occuparit $L O$
parallelum principio motus $A B$. Sed tunc nulla est ha-
benda ratio corporis illius, quod extraplanum $A G E H B$
excurrit

Figura Quinta.



excurrit vsque ad L & O. Hoc ergo motu absoluto; efformatum est solidum super planum A G E H B, quod aliud non est quam vestigium plani fluentis A D, super plano substrato A H. Illud idem corpus hoc etiam modo concipi potest efformari, vt proposuit Geometra, concipiantur omnes lineæ I F plani A D, duci in sibi adhærentes lineas I E, plani A H, siue sint aliæ aliis longiores siue non. Fient enim hoc modo parallelogramma infinita, quorum latera sunt I F, I E; quæ corpus constituent (si corpus constare indiuisibilibus concedatur) illud idem, quod ego per fluxum generari fingeant.

Hic porro obserua ad corporum eiusmodi efformationem,

L 3

tionem,

tionem, me semper quidem supponere, ut planum fluens sit ad planum subiectum perpendiculare super ipsius latus unde motus incipit, (quanquam & aliter possit huiusmodi motus iniri positus planis oblique se mutuo secantibus; sed eiusmodi efformatio mihi minime futura est necessaria) ipsas tamen lineas non opus est esse perpendiculares ad communem basim, unde planum rectum mouetur. Ut habet figura secunda in qua parallelogrammum AD , rectangulum non est: eiusque lineæ IF oblique incedunt super lineas IE perpendiculares ad Basim communem AB . Quo motu generatur corpus, siue parallelepipedum obliquum. In tertia verò figura tam lineæ motæ IF , quam lineæ IE , super quas illæ mouentur; ad basim communem AB sunt obliquæ: nihilo tamen minùs, corpus eo modo producit. Quod hic obseruasse oportuit, ad faciliorem quorundam intelligentiam, quæ inferius venient proponenda.

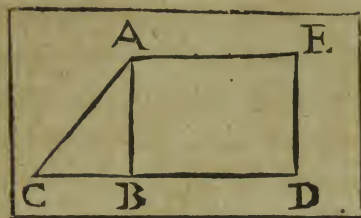
Fig. 5.

P R O P. XIII. THEOR.

Triangulum ABC ductum in parallelogrammum AD . Generat Prisma triangulare.

Demonstratio.

Fig. 6. Nam latus BC trianguli fluens super BD generat parallelogrammum. Latus AC parallelogrammum item producit; dum eius extremum A decurrit totam AE ; & alterum extremum C , semper cohæret extremo C lineæ BC dum mouetur. Dux verò facies oppositæ

Figura Sexta.

positæ super AB & DE ; sunt duo triangula parallela æqualia triangulo ABC . Ergo ex eo ductu generatur Prisma triangulare. Vt propositum est.

R R O P. XIV. THEOR.

Triangulum ABC in triangulum ABD ductum generat Pyramidem; cuius Basis est parallelogrammum sub lateribus BC , BD triangulorum, contentum.

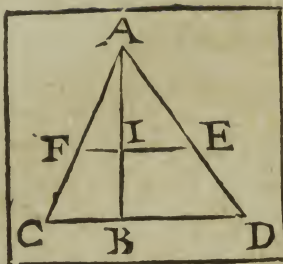
Preparatio.

Ducatur à quocunque puncto I , basis AB communis, linea IF lateri BC ; & linea IE , lateri BD parallela.

Demonstratio.

Dum BC erecta mouetur super BD per motum *Fig. 7* trianguli ABC ; linea IF mouetur super IE : & utraque figuram parallelogrammam describit, eo quod puncta sublimia C & F , dum mouentur, æqualiter semper distent à subiectis lineis BD & IE ; & lineas eisdem

Fig. 7.



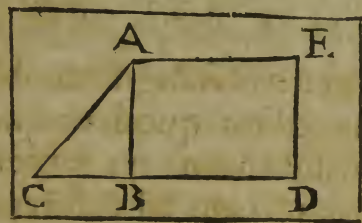
cisdem parallelas hoc modo describant. Sunt etiam Proportionales huiusmodi lineæ. Nam vt AB ad AI; ita est BC ad IF in triangulo ABC: & ita etiam BD ad IE in triangulo ABD. (Sunt enim IF, IE paralle-

læ lineis BC, BD ex constructione) ergo vt BC, ad BD; ita IF ad IE. Sed anguli etiam lineis BC, BD; & lineis IF, IE contenti sunt æquales per 10. lib. II. sunt enim lineæ IF, IE lineis BC, BD in suo situ erectæ, parallelæ; & non in eodem plano. Cum ergo duo latera BC, BD ad se recta, duobus lateribus IF, IE ad se rectis sint Proportionalia circa æquales angulos rectos; & latera opposita, his sint æqualia in parallelogrammis, sicut & anguli oppositi æquales sunt per 34. lib. I. Similia erunt illa parallelogramma per definit. I. lib. 6. Sed & similiter sunt posita. Ergo per Prop. 8. Huius. Lineæ omnes coniungentes binos & binos huiusmodi similium parallelogrammorum angulos, conuenient in vnum punctum, si producantur: & quidem in punctum AI in quo iam duæ BI, DE coniungentes angulos B & I; D & E, productæ conueniunt; & Pyramidem efformabunt. Cuius basis erit parallelogrammum sub lateribus BC. BD comprehensum. Quod erat probandum.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

Si triangulum quodcunque ABC , Rectum sit ad planum AD rectangulum, in quod ducatur. Fiet Prisma triangulare per 13. Huius. Dico tres eius hedras fore rectangula, recta ad opposita triangula.

Figura Sexta.*Demonstratio.*

Quodcunque enim supponatur triangulum ABC , *Fig. 6.* hoc est siue rectangulum sit, siue obliquangulum: cum eius planum supponatur rectum ad planum AD : erit recta BD , quæ perpendicularis est ad AB sectionem communem planorum, etiam perpendicularis ad rectam BC ; & recta AE perpendicularis ad AC in eo plano existentem per 3. Defin. lib. 11. Sed motus situm non mutat, ut Prop. 12. definitum est. Ergo cum triangulum ABC ad terminum ED peruenerit: & duæ lineæ CB , CA duo parallelogramma descripserint; adhuc tunc erunt AE , BD , Orthogonæ ad lineas CA , CB . Quare duo illa parallelogramma erunt rectangula. Tertium verò AD ex hypothesi rectangulum

M

lum

lum est. Sunt autem tria illa rectangula, ad duo opposita triangula, recta: quia recta sunt ad triangulum $A B C$ in suo primo situ ante motum: sed idem triangulum post motum, & super $E D$ constitutum parallelum est triangulo $A B C$ ante motum. Ergo tria illa rectangula ad utrumque triangulum recta sunt. Quare si triangulum quodcumque $A B C$ rectum sit ad planum $A D$, &c. Quod erat probandum.

P R O P. XVI. T H E O R.

Sit triangulum rectangulum $A B D$; in quod ducatur triangulum quodcumque $A B C$ siue rectangulum siue non; ita tamen ut ante fluxum statuatur rectum ad substratum triangulum $A B D$. Dico Pyramidem, quæ per Prop. 14. Huius. Ex eo ductu generatur, basim habere rectangulam.

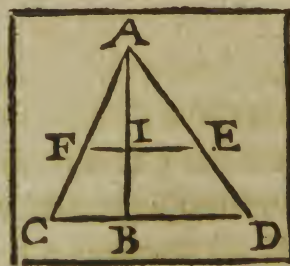
Figura Septima.*Demonstratio.*

Fig. 7. Cum planum $A B C$ rectum ponatur ad planum $A B D$; ponatur etiam recta $B D$ perpendicularis ad commu

communem eorum sectionem AB (ponitur enim tri-
 angulum ABD rectangulum) erit BD per Defin. 4.
 lib. I. Ad lineam BC in plano ABC existentem re-
 cta. Cum igitur dum mouetur BC, eundem semper
 situm ad BD super quam mouetur obseruet: paralle-
 logrammum, quod ab ipsa describitur, rectangulum
 esse necesse est. Vt asserit propositio.

Corollarium.

Hinc fit, vt, si duæ lineæ CB fluens, & BD ma- *Fig. 7.*
 nens, sint æquales; rectangulum ab ipsis descriptum,
 Quadratum sit. Quadrata etiam sint rectangula, quæ-
 cumque describuntur à lineis IF fluentibus supra im-
 motis IE. Sunt enim omnia parallelogramma, ha-
 rum linearum ductu descripta, similia parallelogram-
 mo baseos. Vt supra Prop. 14. huius, exposui.

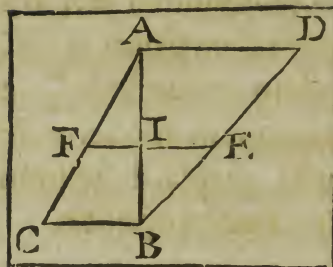
PROP. XVII. DEFINITIO.

Ductus trianguli Orthogoni in triangulum
 Orthogonum, vel in seipsum, subalterne: est
 cum anguli recti ad basim communem positi,
 sunt alterni: & ita alterum in alterum du-
 citur.

EXPOSITIO.

Sit triangulum Orthogonum ABC: ad cuius la- *Fig. 8.*
 tus AB apponatur alterum triangulum Orthogonum
 ABD, vel æquale triangulo ABC, vel ab eo diuer-
 sum, itavt angulus eius rectus, non sit deinceps posi-

M 2 tus



tus angulo recto ABC : sed ei sit alternus intra parallelas AD , BC ; si igitur in eo situ triangulum ABC ducatur in triangulum BAD : ductus ille subalternus dicitur.

PROP. XVIII. THEOR.

Fig. 8. Duo triangu-
la Orthogona ABC , BAD
subalterne posita in se ducta, Pyramidem gene-
rant: Cuius altitudo est latus BC trianguli
fluentis: basis verò est triangulum alterum
 BAD , super quo motus alterius exercetur.

Demonstratio.

Fig. 8. Tota demonstratio, apta tantum conceptione mo-
tus trianguli ABC super alterum nititur. Si ergo trian-
gulum ABC conuerti intelligatur circa AB donec re-
ctum sit ad planum alterius trianguli BAD , in quo
situ statui debet ad motum ineundum. Tunc per De-
fin. 3. lib. II. patet lineam BC rectam esse ad planum
trianguli BAD . Patet etiam ipsam non moueri; quia
nullum ei spatium decurrendum suppetit: patet deni-
que

que ipsum triangulum ABC in eo recto situ, esse latus
vnum futuræ pyramidis: punctum verò A decurrere
debet lineam AD , eique perpetuò adhærere; eò quod
omni careat altitudine. At si ducantur lineæ interme-
diæ IF , IE ; illa quidem in plano trianguli ABC ere-
cti, hæc in plano iacentis trianguli ABD : erit IF ad
 IE perpendicularis per 4. Defin. lib. 11. Et IF super IE
fluens describet parallelogrammum rectangulum; erit-
que eius latus superiùs, descriptum à puncto F fluente,
parallelum lineæ AD per 9. lib. 11. (vtraque enim est
lineæ IE parallela) planum ergo ducitur per lineam
illam à puncto F fluente descriptam, & lineam AD illi Fig. 8.
parallelam per 7. lib. 11. Planum verò illud cum à linea
 AFC non recedat per 1. lib. 11. Transibit per elatum
punctum C . Quia verò linea IF terminum suum E
assecuta, recta est ad planum trianguli ADB , sicut ad
ipsum recta est BC : erunt in illo situ duæ lineæ illæ
inter se parallelæ. Ergo per illas planum ducitur per 7.
lib. 11. In quo est linea BD per 1. lib. 11. Transibit ergo per
 D . Séque mutuò secabunt, planum hoc, & planum
paulò ante descriptum, quod per AD & punctum C
sublime extendi probauimus. Cum ergo ab vno plano,
triangulo scilicet ADB , tria plana à tribus eius lateri-
bus educantur; & ad vnicum punctum C sublime ter-
minentur. Pyramis est corpus illud per Defin. 12. lib. 11.
Cuius altitudo est BC ; cum sit à vertice C pyramidis,
ad planum eius basis ABD , perpendicularis. Duo ergo
triangula Orthogona, &c. Quod erat probandum.

PROP. XIX. THEOR.

Triangulum Orthogonum ABC ductum in rectangulum AD ; Prisma triangulare generat ex Prop. 13. Huius. Dico Prisma huiusmodi æquale esse Pyramidi ortæ ex triangulo ABC in triangulum ABD , (ductâ diametro AD , rectanguli) & Pyramidi simul quæ generatur ex eodem triangulo ABC , in idem triangulum ABD subalterne positum ducto.

Figura Nona.

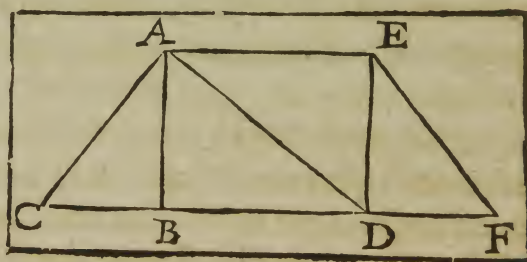
*Preparatio.*

Fig. 9. Producat BD , & fiat DF æqualis lineæ BC & iungatur EF . Erit triangulum EDF æquale triangulo ABC , per 4. lib 1. cui subalternè ponitur triangulum AED æquale triangulo ABD . Probandum ergo est Prisma illud triangulare, de quo agit Propositio, æquale esse pyramidi ortæ ex ductu trianguli ABC in triangulum ABD , & simul pyramidi, ortæ ex triangulo EDF ducto in triangulum subalternè positum DEA .

Demonstratio.

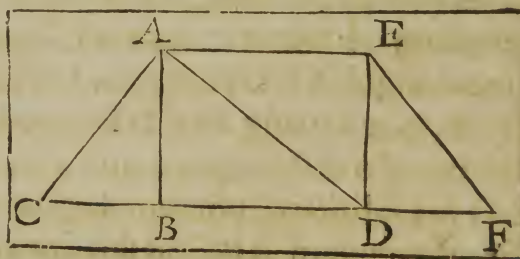
Concipiatur Prisma triangulare, quod ex ductu
trianguli

trianguli Orthogonij ABC in rectangulum AD , generatur iuxta citatam Prop. 13. Huius. Diuidi plano secante super rectanguli diametrum AD , ducto ad ipsum rectangulum perpendiculariter. Duæ ex hac diuisione Pyramides generabuntur: quarum altera, eadem ipsa est, quæ oritur ex ductu trianguli ABC in triangulum rectangulum ABD ; cuius basis est quadrilatera, rectangulum scilicet sub lateribus BC , BD contentum: ex qua enascuntur triangula quatuor ad verticem A conuenientia iuxta Prop. 14. Huius. Altera ve- Fig. 9.
rò Pyramis è Prismatis diuisione, producta; est ea, quam idem triangulum ABC Prisma generans, producit; dum triangulum AED decurrit, facto motus initio ab ipso angulo A , in quo duo triangula ABC , AED sibi adhærent: eodémque triangulo ABC , suum semper situm erectum retinente, vsque ad latus ED rectanguli, siue trianguli AED promoto. Sed hæc Pyramis illa ipsa est, quæ à triangulo EDF , quod æquale positum est triangulo ABC , generatur, dum in triangulum AED sibi subalternè positum ducitur: perinde enim est, siue triangulum ABC in suo situ moueatur super triangulum AED initio motus facto ab angulo A , motúque terminato in latere ED : siue triangulum EDF moueatur super idem triangulum AED subalternum, motus initio in latere ED , & fine, in angulo A , constituto: hæc enim motus diuersitas, in sola ipsius mutatione quoad initium & finem, constituta, nullum discrimen in solidi generationem potest inuere. Patet ergo quomodo Prisma triangulare ex ductu
trianguli

trianguli $A B C$ in rectangulum $A D$, efformatum, æquale sit duabus Pyramidibus: quarum una oritur ducto triangulo $A B C$, in triangulum $A B D$ deinceps positum; altera verò ducto eodem triangulo $A B C$ in locum trianguli $E D F$ translato, in triangulum $A E D$ subalterne positum. Quod erat demonstrandum.

P R O P. XX T H E O R.

Eadem facta suppositione Prismatis triangularis: eiusque in duas partes diuisionis, de qua propositione præcedenti. Dico Pyramidem ad partes E abscissam, dimidiam partem esse Pyramidis ad partes B abscissæ.

Figura Nona.*Demonstratio.**Fig. 2.*

Prisma illud triangulare triplum est Pyramidis, cuius basis est triangulum $E D F$: altitudo verò $A E$, quæ & ipsa est altitudo Prismatis per 7. lib. 12. Ergo altera Pyramis, quæ est reliquum Prismatis, est duæ tertiæ partes prioris Pyramidis. Hæc ergo illius dupla est. Quod erat probandum.

Corolla

Corollarium I.

Si triangulum rectangulum in se ducatur Pyramidem generat duplam Pyramidis illius, quæ producitur ex eodem triangulo in se ducto subalterne. Quæ est Propositio 5. lib. 7. à Geometra demonstrata. Patet ex præcedenti ratiocinatione, si ponatur BD latus rectanguli, æquale lateri BC trianguli ABC fluentis.

Corollarium II.

Sequitur secundò Pyramidem factam ex ductu subalterno Orthogonij trianguli, vel in se vel in aliud; sextam esse partem parallelepipedi, cuius basis est rectangulum sub BC , & BD lateribus triangulorum Orthogonorum quæ in se ducuntur altitudo verò BA latus commune, vnde ductus incipit. Nam Pyramis cuius basis est rectangulum sub BC & BD , altitudo verò BA ; tertia pars est parallelepipedi sub eadē basi, & altitudine, per 7. lib. 12. & eius Coroll. Sed Pyramis huiusmodi dupla est pyramidis genitæ ex ductu eorundem triangulorum subalternè positorum per hanc Propos. Ergo parallelepipedum, Pyramidis huius est sextuplū.

PROP. XXI. THEOR.

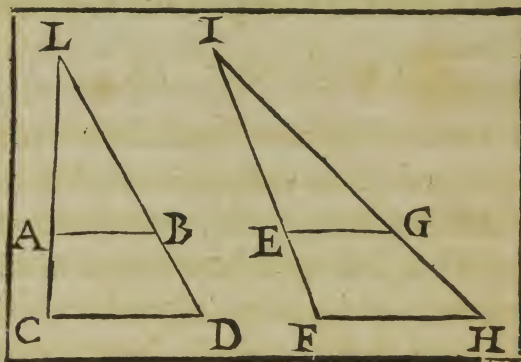
Si duo Trapezia $ABDC$, $EGHF$ fuerint æqualia; duobusque lateribus AB , CD & EG , FH parallelis constent & utroque utrique æqualibus. Dico corpus ex utroque in se ducto secundum latera parallela, & lineas perpendiculares, genitum; esse æquale.

N

Præpa

Preparatio.

Producantur duo reliqua Trapeziorum latera CA , $DB:FE, HG$ donec concurrant in L & I (concurrent enim vt Prop.2. Huius ostensum est.)

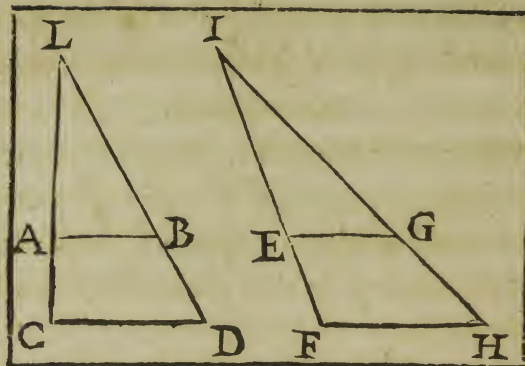
Figura Decima.*Demonstratio.**Fig. 10.*

Duæ lineæ CD, AB duabus FH, EG sunt proportionales (singulæ enim singulis ex hypothesi sunt æquales.) Ergo per 22. lib.6. Triangulum CLD super primam CD ; ad triangulum ALB simile super secundam AB , ita se habet; vt triangulum FIH super tertiam FH ad simile triangulum EIG super quartam EG . Et Conuertendo. Vt triangulum CLD ad Trapezium $ACDB$; ita triangulum FIH ad Trapezium $EFHG$. Et Permutando. Ita triangulum CLD , ad triangulum FIH : vt Trapezium $ACDB$ ad Trapezium $EFHG$. Sed Trapezia sunt æqualia ex hypothesi. Ergo & triacula illa sunt æqualia. Ad hæc concipiantur

cipiantur super AB , & CD : item super EG , FH , eri-
 gi quadrata earundem ipsarum linearum perpendicu-
 lariter ad plana triangulorum amborum: & iungi bi-
 nos & binos angulos utrorumque Quadratorum: fient
 duæ Pyramides per Propos. 11. Huius quarum vertices
 sunt L , & I : puncta scilicet, ad quæ iam concurrunt
 duæ lineæ CA , DB binos angulos C & A ; & binos D
 & B connectentes; item duæ FE , HG duos Quadra- *Fig. 10.*
 torum angulos pariter coniungentes. Hæ ergo Pyra-
 mides duæ, æquales sunt inter se. Nam cum bases Qua-
 dratæ harum Pyramidum rectæ sint ad plana ipsa trian-
 gulorum CLD , FIH : lineæ à verticibus L & I , ad li-
 neas CD & FH (quæ sunt communes sectiones ba-
 sium Pyramidum & horum triangulorum) ductæ per-
 pendiculares, erunt Pyramidum altitudines. Sed illæ
 lineæ à verticibus L & I triangulorum perpendiculares
 ductæ ad CD & FH , sunt æquales. Sunt enim eadem
 lineæ, altitudines ipsæ æqualium triangulorum CLD ,
 FIH , æquales bases CD & FH habentium. Ergo Py-
 ramides illæ sunt æquales per 5. lib. 12. Æquales enim
 sunt ex hypothesi earum Quadratæ bases. Quia verò
 per Prop. 7. Huius. Secantur proportionaliter per plana
 ducta per AB , per EG , itavt eadem sit Ratio Pyrami-
 dum integrarum CLD , FIH ; & partium abscissarum
 ALB , EIG : ac proinde & reliquorum corporum, siue
 Pyramidum truncatarum super Trapeziis $ACDB$,
 $EFHG$. Ergo & Pyramides abscissæ inter se, & Pyra-
 mides illæ truncatæ sunt æquales. Constat autem ex
 constructione Pyramides huiusmodi truncatas, siue

N 2 maus

Figura Decima.



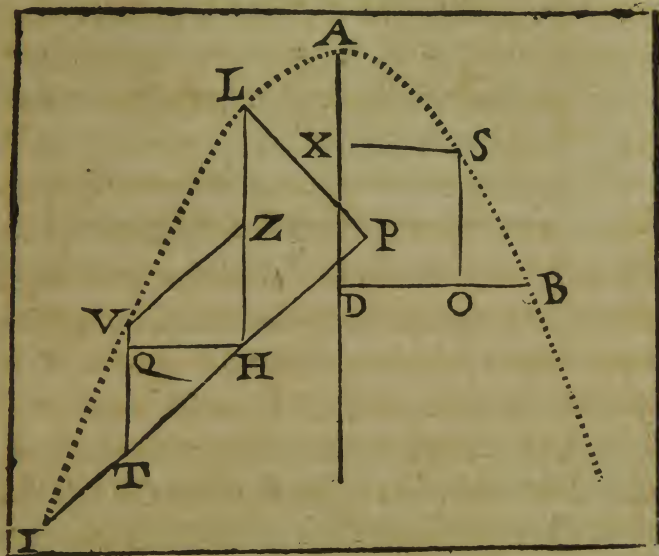
maius appellare, Trapezia solida, ea esse solida quæ oriuntur ex Trapeziis in se ductis iuxta Conditionem in propositione statutam. Omnes enim lineæ per omnia puncta linearum AC , EF ductæ, lineis AB , CD ; & lineis EG , FH parallelæ; à seipsis supra seipsas perpendiculariter ad plana AD , EH erectis decurruntur: hoc est, totæ ipsæ superficies AD , EH supra bases suas AC , EF perpendiculariter supra seipsas erectæ ducuntur in se secundum lineas AB , CD ; & EG , FH iuxta sensum definitionis Propos. 12. allatæ ad Geometræ, meamque mentem. Quare si duo Trapezia, &c. Quod erat probandum.

P R O P. XXII. THEOR.

Si ex duabus parabolæ alicuius diametris AD , LH , æquales abscindantur sagittæ AD , LH ; & per D & H ordinatim ad ipsas applicatæ BD , IH ducantur. Quæ deinde applicatæ similiter secantur in O & T : per quæ tandem puncta, lineæ

neæ OS , TV diametris AD , LH ducantur
parallelæ, occurrentes ipsi parabolæ in S , & V .
Dico lineas OS , TV esse æquales inter se.

Figura Vndecima.



Preparatio.

A punctis S & V, ducantur SX, VZ parallelæ ordinatim applicatis BD, IH: quæ & ipsæ ad easdem diametros AD, LH erunt ordinatim Applicatæ. Siquidem omnes ordinatim applicatæ ad eandem diametrum, sunt inter se parallelæ. Fig. 11.

Demonstratio.

Linea D A ita est ad X A : vt Quadratum lineæ B D, ad Quadratum lineæ S X per Prop. 20. lib. 1. Appollonij, siue ad Quadratum lineæ O D. (Est enim O X parallelogrammum, habens per 34. lib. 1. Aduersa latera

$$N \quad 3 \quad O.S.,$$

OS, DX & OD, SX æqualia) vt autem Quadratum
 lineæ BD ad Quadratum lineæ OD : ita est Quadra-
 tum lineæ IH ad Quadratum lineæ TH per 22. lib. 6.
 (Sunt enim ex hypothesi lineæ BD, IH sectæ in O &
 T proportionaliter) sed TH & VZ sunt æquales in
 parallelogrammo VH. Ergo ita est Quadratum lineæ
 HI ad Quadratum lineæ VZ ; vt Quadratum lineæ
 BD, ad Quadratum lineæ SX : siue vt linea DA ad
 Fig. 11. XA. Sed vt Quadratum lineæ HI ad Quadratum li-
 neæ ZV ; ita est linea HL ad ZL. Ergo ita est DA, ad
 XA ; vt HL ad ZL. Sed DA prima æqualis est ter-
 tiæ HL ex hypothesi. Ergo & secunda XA æqualis erit
 quartæ ZL, per 14. lib. 5. Demptis ergo XA & ZL
 æqualibus ab æqualibus DA, HL ; remanebunt æqua-
 les DX, HZ. Quibus cum sint æquales OS, TV in
 parallelogrammis SD, VH ; erunt & ipsæ OS, TV
 æquales inter se. Quare si ex duabus parabolæ, &c.
 Quod erat probandum.

R R O P. XXIII. THEOR.

Positis iterum æqualibus sagittis AD, LH:
 & ordinatim Applicatis BD, IH similiter se-
 ctis in O & T. Ductis denique OS, TV paral-
 lelis ad diametros AD, LH. Dico lineas SO,
 VT æqualiter distare à diametris AD, LH.

Preparatio.

Fig. 11. A punctis D & H ducantur ad lineas SO, VT per-
 pendiculares DO, HQ (hic cum AD sit axis parabolæ,
 iam

[illegible]

iam est DO perpendicularis ad SO. In aliis casibus nova
linea duceretur) ducatur etiam à puncto L, linea LP
perpendicularis ad HI productam ultra, H quando
opus fuerit.

Diametri abscissæ AD, HL sunt æquales ex sup-
positione. Ergo æqualia sunt triangula ADB, LHI
(ductas concipe lineas AB, LI de industria omittas)
per Prop. 218. lib. 5. de parab. doctissimi Geometræ no-
stri. Ergo per Coroll. ad Prop. 15. lib. 6. ut se habet ba-
sis BD ad basim IH: ita Reciproce se habet altitudo
LP trianguli LIH; ad altitudinem AD trianguli
ADB; hoc est, ad LH, lineæ AD ex hypothesi *Fig. 11.*
æqualem, sed ut LP ad LH; ita est in triangulo HQT,
latus

latus HQ ad latus HT , (sunt enim duo triangu-
la LPH , HQT similia propter angulos P & Q rectos, &
angulos H & T illum externum hunc internum in paralle-
lis LH , VT , æquales) ergo ut BD ad HI ; ita est HQ ad
 HT . Et Permutando. Ut BD ad HQ ita IH ad HT .
Sed ex hypothesi, ut IH ad HT ; ita est BD ad DO .
Ergo ita est BD ad HQ , ut eadem BD ad DO . Æqua-
les sunt igitur lineæ OD , QH per 9. lib. 5. quæ distan-
tiam parallelarum AD , SO , & LH , VT metiuntur
utpote ad ipsas perpendiculares. Quare positis iterum
&c. Quod erat probandum.

Scholium.

Fig. 11. Demonstrata est Propositio hæc, posita diametro
 AD , quæ & ipsa axis est parabolæ, atque adeo ordi-
natim applicata BD , ad ipsam perpendicularis. Quan-
do verò utraque diameter obliqua fuerit, & obliquæ
ad utramque ordinatim Applicatæ, veritas assertionis
etiam in hoc casu facile colligetur eadem ratiocinatio-
ne, paulò tamen fortasse longiore. Qua omissa, bre-
uissimam accipe. Quæcunque tandem proponantur
diametri: Axem ducito AD : ex quo sagitta AD ,
abscindatur æqualis abscissis sagittis propositarum dia-
metrorum; & ducatur BD ordinatim applicata, quæ
similiter secetur in O , ut aliæ duæ Applicatæ sectæ
sunt. Tunc demonstrabuntur parallelæ reliquarum
diametrorum sigillatim eodem spatio inter se distare,
quo distant axis AD & eius parallela SO , atque adeo
& inter se ipsæ eodem distare.

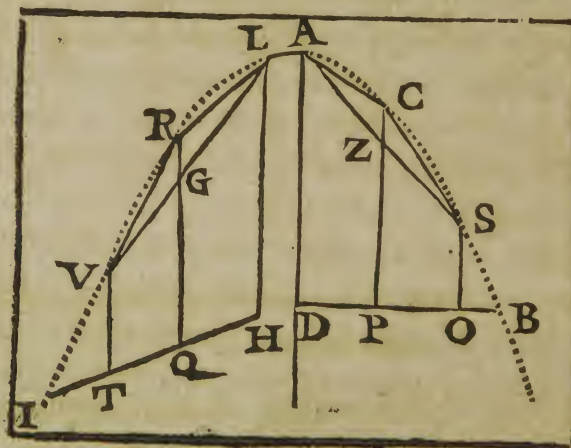
Corollarium.

dentem. Si ergo utrimque æquales distantie à diametris, demantur ab æqualibus: æquales remanebunt distantie parallelarum.

P R O P. XXIV. T H E O R.

Fig 12. Positis adhuc æqualibus sagittis AD & LH : quas abscindunt ordinatim ad diametros AD , LH , Applicatæ BD , IH : similiterque sectis ipsis Applicatis in O & T : per quæ puncta ducantur OS , TV diametris AD , LH , parallelæ. Dico lineas OS , TV abscindere ex parabola segmenta æqualia nempe ACS , LRV .

Figura Duodecima.



Preparatio.

Applicatarum partes abscissæ DO , & HT , diuidantur bifariam in P & Q : per quæ puncta ducantur parallelæ PC , QR diametris AD , LH ; occurrentes Parabolæ

rabola in C & R. Ducantur etiam AS, LV secantes proximè ductas lineas PC, QR in Z & G. Denique ducantur rectæ CA, CS : R L, RV.

Demonstratio.

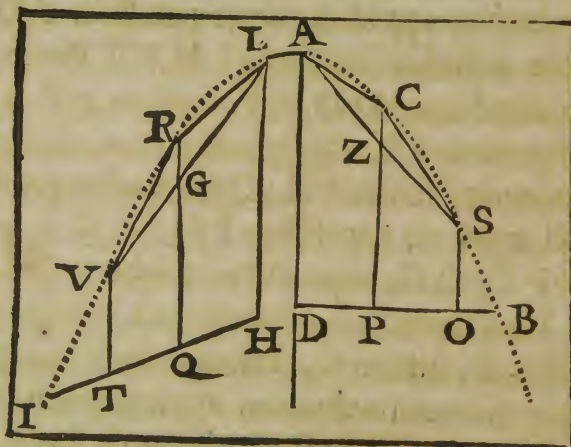
Cum ordinatim applicatæ DB, IH similiter secen- Fig. 12
tur in O & T : & rursus partes abscissæ DO, HT simi-
liter secantur in P & Q nempe bifariam : secabuntur
ipsæ applicatæ DB, HI similiter in P & Q ; nam vt
DB ad DO ; ita ex hypothesi HI ad HT. Et vt DO
ad DP ; ita HT ad HQ ; ergo ex æquo , vt DB ad
DP ; ita HI ad HQ ; ergo per Prop. 12. Huius. æqua-
les sunt lineæ PC, QR. Rursus quia Trapezium
ADOS duabus oppositis lineis parallelis AD, SO
constat, quæ æquales sunt lineis LH, VT. Per Prop. 12.
Huius : & diuiduntur DO, HT similiter in P & Q : ac
tandem ducuntur PZ, QG parallelæ lateribus paral-
les Trapeziorum : erunt PZ, QG æquales per Prop. 4.
Huius. Si ergo ab æqualibus PC, QR, æquales
demantur PZ, QG ; æquales remanebunt CZ, RG.
Ad hæc. Tam linea AS, quam linea LV bifariam se-
cantur, illa in Z, hæc in G, vt statim docebo, ergo CZ
& RG sunt diametri ordinatim Applicatarum AS, LV.
Cum ergo sagittæ CZ & RG, ab Applicatis AS, LV
abscissæ, sint æquales : erunt segmenta parabolica
ACS, LRV æqualia per Propos. 240. lib. 4. de Parab.
Geometræ. Quod autem AS & LV bifariam diuidan-
tur in Z & G, ita fit euidens. Si producerentur lineæ
AS, DO concurrerent ad partes lineæ minoris SO &
O 2 fieret

fieret triangulum; cuius latera secarentur à parallelis
 OS, PZ proportionaliter. Ergo tam AS in Z , quam
 DO in P bifariam diuiduntur. Verùm ergo esto, quod
 positis æqualibus sagittis, &c. Quod erat probandum.

PROP. XXV. THEOR.

Iisdem positis. Dico tam Trapezium $ACPD$,
 in se ductum corpus generare æquale corpori
 orto ex ductu Trapezij $LRQH$ in se : Quam
 Trapezium $CSOP$ in se ductum, æquale cor-
 pus producere corpori orto ex Trapezio
 $RVTQ$ in ducto.

Figura Duodecima.



Demonstratio.

Duo Trapezia $ACPD$ & $LRQH$ constant duobus lateribus AD , CP . Et LH , RQ parallelis & æqualibus per Prop. 22. Huius; sunt enim ordinatim Applicatæ DB , HI similiter sectæ in P & Q . Vtriusque

que porro altitudo est æqualis per Prop. 23. Huius ergo per Prop. 3. Huius æqualia sunt duo illa Trapezia. Ergo per Prop. 21. Huius. Si in se ducantur, corpora; siue solida Trapezia, æqualia generabunt. Pari modo Trapezia CSOP, RVTQ. Solida Trapezia, si in se ducantur, æqualia producent. Quare iisdem positis, &c. Quod erat probandum.

PROP. XXVI. THEOR.

Iisdem adhuc positis. Sectis scilicet, ordinatim Applicatis DB, HI æquales sagittas AD, LH abscindentibus; similiter in O & T. Sectis item DO, HT bifariam in P & Q: ductisque lineis PC, QR parallelis ad diametros AD, LH. Ac tandem iunctis AC, CS, & LR, RV. Dico corpus ortum ex ductu polygoni ACSOD in se, posita basi DO: æquale esse corpori orto ex ductu polygoni, LRVTH in se, posita basi siue principio ductus, HT. Idemque semper euenire; si rursus basium partes DP, PO & HQ, QT bifariam diuisis, & per diuisiones ductis lineis ad diametros parallelis, multiplicentur polygoni vtriusque latera, ad parabolam Applicata. Fig. 12.

Demonstratio.

Cum ex præcedenti Propositione constet Trapezium ACPD in se ductum. Trapezium solidum generare æquale Trapezio solido, quod ex Trapezio LRQH in se ducto generatur: Idemque de Trapeziis

O 3 CSOP,

CSOP, RVTQ conclusum sit. Constat duo simul Trapezia solida ex duobus Trapeziis prioribus in se ductis orta: quæ aliud non sunt, quam corpus ex polygono ACSOD in se ducto genitum. Æqualia esse duobus Trapeziis solidis posterioribus, hoc est, corpori ex polygono LRVTH in se ducto, genito. Quæ ratio, cum valeat in quavis multiplicatione laterum polygonorum per continuam bisectionem linearum DO, & HT, instituta. Patet totius propositionis veritas.

Corollarium.

Fig. 12. Ex præcedenti & proximè allata propositione sequitur. Quod si ipsæ integræ ordinatum Applicatæ DB, HI continuè bisecentur: parque fiat partium vtriusque Applicatæ multitudo: ex quibus singulis partibus parallelæ educantur; vt fiant polygona, quemadmodum in hac propositione constructa sunt; Polygona huiusmodi in se ducta generare corpora æqualia: nec alia opus est ad hoc probandum demonstratione, quam proxime allata perpetua enim illa bisectio vtriusque Applicatæ, vtramque in partes proportionales diuidit; vnde, facta polygonorum constructione, sequitur æqualitas corporum ex polygonis in se ductis, genitorum. Imò nec bisectio omninò necessaria est ad polygonorum constructionem. Si enim vtraque ordinatim Applicata DB, HI similiter quomodocumque secantur, & reliqua absoluantur ad polygonorum constructionem necessaria: generabunt huiusmodi polygona

LIB. II. Examen Quadraturæ primæ. iii
polygona in se ducta, solida æqualia. Quod eodem
modo demonstrabitur, quo demonstrata est Proposi-
tio superior.

PROP. XXVII. AXIOMA.

Illæ quantitates dicendæ sunt æquales à qui- Fig. 13
bus in infinitum partes demi possunt inter se
æquales.

EXPOSITIO.

Assumit hoc principium tanquam per se notum
Geometra lib. 8. de Proport. Princ. i. nec puto quem-
quam ab eo dissensurum, si modo sensum terminorum
percipiat, qui est huiusmodi. Si propositis duabus quan-
titatibus, liceat partes in alterutra assignatas, ex altera
demere; non possunt non esse æquales duæ illæ quan-
titates. In alterutra, inquam assignatas. Ita vt sub-
tractio illa partium mutua & Reciproca esse possit:
Alioquin si partes detrahendæ in alterâ tantum earum
quantitatum assignarentur, quæ ab altera demi debe-
rent: falsum sequeretur interdum ex hoc principio.
Nam proponantur duæ quantitates, palmaris vna, al-
tera bipalmaris: partes omnes palmaris demi semper
poterunt ex bipalmari, sequi tamen non potest ex eo
æqualitas duarum illarum quantitatum: optime ta-
men sequetur si libera sit partes æquales ex vtralibet
demendi facultas. Neque enim in casu proposito lice-
bit partes quaslibet in bipalmari assignatas ex palmari
subtrahere; vnde non æqualitas earum quantitatum,
sed

sed inæqualitas concluderetur. Atque hic est, haud dubie, Geometræ sensus : iuxta quem, principium censuit tam euidens ; vt cum obseruaret in angulis omnino, vt videbatur, non habere locum ; angulos, maluerit à ratione omnis quantitatis excludere, quam huic principio assensum non præbere. Circa quod vt sensum expromam meum, licet ab instituto non nihil recedere videat ; suadet in primis admiranda angulorum contingentium natura ; qua de hic agitur. Et à summo Geometra disputatur. Cuius loco citato hæc sunt verba.

Quod si, inquit, inter veras quantitatis species Angulos admiserimus ; incidemus in Labyrinthos quibus Geometriæ principia se destruant, necesse est. Quod vt manifestum fiat, sequentis propositionis demonstrationem considerandam pono.

T H E O R E M A.

Contingat recta AB duos circulos se contingentes in B : exhibentes duos angulos contingentie ABCD, AB EF. Dico hos angulos esse æquales.

Demonstratio.

Ille sunt, inquit, dicenda æquales quantitates à quibus in infinitum partes demi possunt inter se æquales. Sed hoc fieri potest in Angulis dictis. Quod sic ostendo. Diuidatur semicirculi Perimeter BDH bifariam in D : & ducta BD occurrat semicirculo BEG in F. Igitur angulus DBH, æqualis



lis est angulo FBG . Eadem ope- Fig. 13
ratio fiat de arcu BCD . Bisecetur
scilicet in C , & ponatur recta BC .
Itaque etiam Angulus CBD , aequa-
lis est Angulo EBF . Sed hoc in
infinitum fieri potest. Igitur quan-
titas Anguli $HBCD$ semicircu-
li, aequalis est quantitati Anguli
 $GBEF$ alterius semicirculi. Qua-
re reliqui etiam Anguli contingen-
tia, qui complent rectum Angulum
sunt inter se aequales.

Hinc consequitur doctrina, quæ plane destruit Geometriæ principia. Quod scilicet totum sit parti suæ æquale. Nam Angulus semicirculi $G B E F$, pars est Anguli $H B C D$, & tamen ostensa est huic Angulo æqualis.

Hæc Geometra. Ex quibus patet, ut allati principij robur tueatur; angulos, qui illud observare minime possunt; extra omnem quantitatis Rationem constituere. Cui hac in re, ut assentiam (quamquam tantus Author summi sit apud me ponderis,) adduci vix possum. Ut enim concedam angulos cuiuscumque generis inter veras & hætenus receptas tres quantitatis species reponendos non esse: quantitatis tamen Rationem proxime æmulantur; & quidem evidentius quam tempus, vel motus, aut ponderum momenta: quæ, ut multa alia, propter quandam quantitatis Rationem, quam observant; veræ ipsius quantitatis iure
P donantur;

donantur; eiusque Principiis velut sibi propriis nituntur. Et verò quanti semper fuit momenti apud Geometras angulorum doctrina? Quam frequens usus? Consulatur ipsæ Geometriæ parens Euclides. Observabitur non obscure iacta ab eo Geometriæ fundamenta non minus angulis niti, quam propriis ipsis veræ quantitatis generibus.

Verum si anguli quantitatis Rationem obtinere concedantur. Vel allatum principium corruat necesse est; vel eo stabilito, absurdum à Geometra deductum admittendum. Ergo verò & angulos quolibet, (pace dixerim tanti viri,) quandam quantitatis Rationem sibi vindicare assero: & principium illud æquè in angulis ac in reliquis quantitibus notum esse censeo. At allata demonstratio contrarium suadet evidentissime? Nunquid tam euidenter ut omnem euadat fallaciæ suspicionem? Ita sane ego quidem censeo aliquid fallaciæ in ea demonstratione subesse. Quam ut aperiā, hæc attentè perpendantur.

Fig. 13.

Vult Author doctissimus constructionem ad demonstrationem ita præparari; ut anguli DBH, CBD qui tanquam partes ex duobus propositis angulis semicirculorum DCBH, FEBG in infinitum auferri debent sint rectilinei: sed angulos rectilineos qui in infinitum ab angulis semicirculorum demi exigit: quid aliud exigit nisi ut tales sint anguli, qui debent ab utroque angulo semicirculi demi ut minores semper sint in infinitum, quam vterque semicirculorum inæqualium angulus: Siquidem omnis angulus



lus rectilineus acutus, semper minor est omni angulo semicirculi per 16. lib. 3. At si partes ex vtraque quantitate demendæ eam conditionem admittere possunt. Quid tam inæquale quod æquale probari non possit per principium allatum eo modo expositum. Si enim duæ sint quantitates vna palmaris, altera bipalmaris, quas velim probare esse inter se æquales; id perficiam; si mihi liceat partes demendas ita determinare, ut minores in infinitum semper sint quantitate palmari. Si eas partes æquales ex vtraque quantitate in infinitum subtraxero. Eas enim ex suppositione demere possum ex quantitate palmari, quandoquidem minores, quam ea sit, supponuntur: multo magis ex bipalmari, eas licebit subtrahere. Ergo iuxta principium allatum æquales forent quantitates palmaris & bipalmaris. Quis id admittat? Is sane qui hanc conditionem in partibus æqualibus in infinitum demendi ex vtraque quantitate, adhibere voluerit siue explicitè, ut ego in allato exemplo, siue implicitè, ut vir doctissimus, partes demendas ex angulis semicirculorum iubens esse angulos rectilineos acutos: hoc enim ipso, minores semper vult partes demendas utroque angulo semicirculi, quamvis inter se supponantur inæquales. Quod

P 2 vt

vt euidentius constet. Liceat mihi pro iure meo partes quascumque ex angulis semicircularum $DCBH$, $FEBG$ detrahare. Liceat mihi loco angulorum rectilineorum, curuilineis, si lubeat, vei. Quis id mihi non concedat? cum ipsi etiam anguli semicircularum curuilinei sint; partesque eiusdem naturæ, videantur

Fig. 13. exigere. Liceat ergo mihi semicirculum $BILM$ describere maiorem quidem semicirculo BFG , minorem verò altero semicirculo $BCDH$: & Angulum semicirculi $LIBM$ statuere. demi posse concedam angulum hunc $LIBM$ ex angulo $DCBH$. Nequaquam tamen admisero demi posse ex angulo $FEBG$. Cum ergo pars quædam anguli $DCBH$, nempe angulus $LIBM$ ex eo demi possit: quæ eadem ex angulo $FEBG$ nequit auferri. Nihil absurdi sequitur ex principio allato etiam si anguli in quantitatibus sortem admittantur. Imò optime ex eo concludetur inæqualitas angulorum, quos inæquales semicirculi cum sua diametro continent. Sicut & angulorum contingentia; eo quod quædam pars vnius angulorum illorum demi nequit ex altero. Ita vt absurdum, quod ante sequi videbatur, non aliunde ortum habeat quam ex suppositione talium partium subtrahendarum, nempe angulorum rectilineorum acutorum, qui semper in infinitum tales erunt, vt demi possint ex quouis angulo semicirculi cuiuslibet. Quare admittantur anguli cuiuscumque generis in Rationem aliquam quantitatis, & verissimum esto principium hac propositione allatum, quo statim vsurus sum

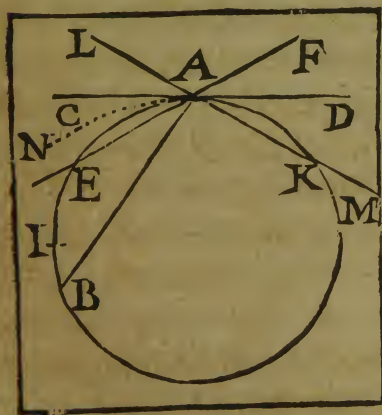
Propo

Propositione sequenti. Sed quando semel à via digressi sumus; antequam in eam reuertamur, accipe iucundam super eadem angulorum contingentia materiâ disceptaciunculam, quam cum Geometra doctissimo Reuerendi P. Gregorij olim in Mathematicis discipulo, aliâs habere me contigit. Bina proposuit ille Theoremata perquam sanè subtilia, nec alia, vt reor, in officina procusa, quàm qua proxime allatum. Sic ergo habet.

Theor. Primum.

Tangat linea recta C D circulum in A : à quo puncto ducatur recta A B intra circulum cadens. Dico, inquit, eandem esse rationem anguli rectilinei C A B ad angulum rectilineum B A D ei deinceps : & anguli segmenti B A I ad angulum segmenti B A K ei deinceps.

Demonstratio.



præstari potest) vt eadem statuatur ratio, cum ratione angulorum segmentorum. Id præstet linea L M. Quia

Vel enim maior est ratio segmenti anguli B A I ad segmenti angulum B A K : quàm ratio anguli B A C ad angulum B A D; vel minor. Si maior; ita poterit augeri angulus B A C, & minui angulus B A D, (quanquam sine vlla diminutione id ipsum præstari potest) vt eadem statuatur ratio, cum ratione angulorum segmentorum. Id præstet linea L M. Quia

P 3

igitur

L I B. II. *Examen Quadraturæ primæ.* 119
 gulum B A D. Ergo est æqualis. Quod erat pro-
 bandum.

Theor. Secundum.

Tangat linea C D circumulum in A, ad quod punctum
 ducatur perpendicularis A G, quæ erit circuli diame-
 ter. Dico angulum rectum G A C, & angulum G A B
 semicirculi esse æquales.

Præparatio.



Diuidatur vtraque semi- *Fig. 15.*
 circumferentia bifariam in
 B & K: ad quæ puncta du-
 cantur lineæ A B, A K. An-
 guli recti G A C, G A D
 bifariam diuidentur; ita vt
 quatuor anguli ad A con-
 stituti sint semirecti, atque
 adeo æquales. Quare an-
 gulus B A C tertia pars erit

anguli B A D. Et quia per præcedens Theor. ita est angu-
 lus segmenti B A I ad segmenti angulum B A O: vt
 angulus B A C ad angulum B A D: erit etiam segmenti
 angulus B A I tertia pars segmenti anguli B A O. Ergo
 etiam segmenti angulus K A O, angulo B A I æqualis,
 erit tertia pars segmenti anguli B A O. Atque adeò
 æqualis duobus angulis singulis G A K, G A B. Si enim
 à toto angulo B A O segmenti, dematur tertia pars,
 segmenti scilicet angulus K A O; & reliquus angulus
 rectilineus B A K bifariam diuidatur à linea A G; to-
 tum

tum segmenti angulum BAO in tres partes æquales diuidi necesse est. His positis.

Demonstratio.

Fig. 15.



Angulus BAC æqualis est angulo BAG cui ostensus est æqualis segmenti angulus KAO siue BAI . Si ergo duobus æqualibus BAC , BAI addatur communis angulus BAG : fiet angulus rectus GAC æqualis semicirculi angulo GAI . Quod erat probandum.

Corollaria.

Hinc colligebat Theorematum Author quædam, quæ paradoxa appellabat.

Primum est, omnes angulos semicirculorum omnium æquales esse. Sunt enim omnes æquales ostensi angulo recto.

Secundum omnes angulos contactuum æquales etiam esse inter se. Si enim anguli omnes semicirculorum sunt æquales: æquales item anguli recti: non possunt non esse æquales Anguli contactus, qui sunt differentia Angulorum rectorum & Angulorum semicirculorum.

Tertium. Quantitatem addi posse quantitati; totum

tum tamen non fieri maius patet nam angulus contactus additus angulo semicirculi, angulum rectum constituit qui non est maior angulo semicirculi.

Quartum. Veram non esse Propositionem 19. lib. 5. Euclidis si sit ut totum ad totum; ita ablatum ad ablatum: erit reliquum ad reliquum ut totum ad totum. Nam angulus BAC est tertia pars anguli BAD; & Fig. 15. ablati segmenti angulus BAI, tertia pars ablati anguli BAO. & tamen reliquus angulus contingentiae CAI, non est tertia pars reliqui anguli contingentiae DAO. Sunt enim huiusmodi anguli contingentiae, æquales.

Alia plura ex duplici illo Theoremate inaudita sequerentur quæ firmissima alioqui Geometriæ fundamenta, si verum foret, concuterent. Verum paralogismo, quamquam solerti & peracuto, conclusio prioris Theorematis, unde secundum pendet, tota nititur: ut multiplici argumento demonstro sequenti Propositione.

Theorema.

Paralogismo non caret probatio Theorematis primi præcedentis.

Demonstratio.

Primò. Quæ theorematum Author corollaria vocat paradoxa; aptius absurda & impossibilia vocanda fuere: quæ cum ex posito theoremate primo sequantur: ipsum falsum & eius probationem vitiosam aper-

Q. tē

tè indicant non secus ac infinitas propositiones probant Geometræ per deductionem ad aliquid absurdum, quod nullum visum est unquam absurdius eo: quo assereretur, ut hic contingit, totum non esse maius aliqua sui parte: vel excedens quantitate, quæ exceditur, non esse maius: quod necessario sequitur, si semicirculorum omnium anguli æquales concedantur. Nec minus absurdum est quantitatem ad quantitatem addi, neque tamen augeri. Nunquid conclusionem illam augmentatione deductam par est certioræ æstimari Principiis huiusmodi lumine naturali solis luce non minùs splendido notissimis? Imò cum hæc sequantur ex Antecedente illo Theoremate. Solemni Geometrarum more reiiciatur absurdum enim non nisi ex absurdo proficisci potest.

Fig. 15.



Secundò. Cum dicitur si non est Ratio anguli BAI segmenti ad segmenti angulum BAO, eadem cum ratione anguli BAC, ad angulum BAD, vel est eâ maior vel est minor. Respondeo neque eandem esse, neque maiorem neque minorem: quam igitur? Nullam. Quid ita? quia scilicet inter eas quantitates, angulum, inquam, BAI segmenti, & segmenti angulum BAO, quædam infinitas habetur; quæ omnem inter eas Rationem tollit. Quomodo? En tibi. Si est Ratio

Ratio quædam inter angulum BAO segmenti & angulum BAI siue KAO , segmenti: erit etiam Ratio quædam inter angulum rectilineum BAK (qui est excessus Antecedentis supra Consequens) & segmenti angulum KAO , qui est Consequens. Ergo etiam Ratio quædam erit inter angulum GAK (qui semissis est Antecedentis) & eundem segmenti angulum KAO : Sed angulus KAD æqualis est angulo KAG . Ergo Ratio quædam est inter angulum KAD & segmenti angulum KAO . Ergo etiam Ratio quædam foret inter angulum contingentia OAD (qui est excessus Antecedentis supra Consequens) & ipsum Consequens, scilicet segmenti angulum KAO . Sed hoc dici non potest. Nam angulus contingentia OAD infinities multiplicatus nunquam excedet aut etiam adæquabit segmenti angulum OAK , qui maior est angulo quocumque rectilineo, qui minor sit angulo DAK . Itaque conditio necessaria iuxta definitionem 5. lib. 5. Euclidis ad aliquam Rationem habendam inter se, his quantitibus desit. Ergo etiam & illis deesse necesse est: scilicet segmentorum angulis BAI , BAO . Vnde præscinditur tota Authoris ratiocinatio. Hinc obiter obserues (aliud enim ago) nullum segmenti ullius angulum ad alium cuiuscumque alterius segmenti angulum siue eiusdem circuli siue diuersi Rationem habere posse. Nam anguli segmentorum ab angulis rectilineis, inter quos semper inuenitur aliqua Ratio, differunt angulo contingentia; qui angulos, quibus adhærent omnis Rationis incapaces reddunt. Sed ad rem.

Q 2

Tertio.

demonstret. Nec verò etiam potest : quia tunc iubet absurdum construi quod cum aperta principij petitione, in me retorquet. Quis enim non videat, si talis diminutio fieri imperetur anguli BAC , ut reliquus angulus minor sit angulo BAI segmenti; aduersarium cogi, aliquid asserere vnde absurdum ipse deducas : ut tibi potius absurdum illud in antecedentibus commissum, quam ipsi tribui debeat : atque adeò ex absurdo à te supposito postmodum inferre te angulum BAF , aut BAD minorem esse segmenti angulo BAK ; eò quod angulus BAE minor sit segmenti angulo BAI cur enim minor est angulus BAE , angulo BAI segmenti: nisi quia ita statutum à te prius fuit. Atque hæc satis ex occasione de mirabili natura anguli illius contingentia. Institutum prosequamur.

PROP. XXVIII. THEOR.

Positis adhuc quæ superioribus Propositionibus posita sunt. Abscindant scilicet Ordinatum Applicatæ DB , HI æquales sagittas AD , LH ex diametris Parabolæ : ipsæque Applicatæ similiter secentur in O & T : per quæ puncta ducantur OS , TV diametris parallelæ, abscindentes ex Parabola arcus ACS , & LRV . Dico figuram mixtam, quæ continetur arcu Parabolico ACS , & rectis lineis AD , DO , OS ; in se ductam producere corpus æquale corpori producto ex figura mixta $LRVTH$ in se ducta.

Q 3

Præpa

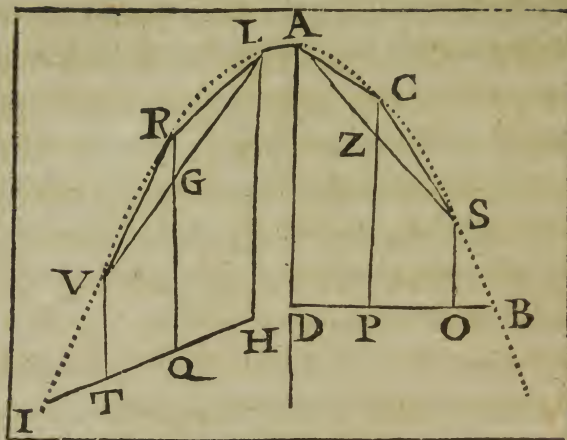
*Preparatio.*

Fig. 12. Ducantur AS & LV abscissos arcus parabolicos subtendentes. diuidatur vtraque linea DO, & HT bifariam in P & Q: ductisque PC, QR, diametris, parallelis, parabolæ occurrentibus in C & R: iungantur lineæ rectæ CA, CS, & RL, RV; Rursus, si lubet, diuidantur partes PD, PO; item QH, QT bifariam & eadem constructio absoluitur: ita vt polygoni describantur in segmentis Parabolicis ACS, LRV, quotcumque libuerit laterum.

Demonstratio.

Quia corpus ortum ex ductu Trapezij ASOD in se; æquale est corpori orto ex ductu Trapezij LVTH in se, per Prop. 21. Huius. Item per Prop. 26. Corpus ortum ex polygono rectilineo ACSOD in se ducto; æquale est corpori orto ex polygono rectilineo LRVTH

LRVTH in se ducto: & ita in infinitum multiplicatis polygonorum lateribus, semper æqualia corpora, si in se ducantur huiusmodi polygona; productura sunt. Hinc fit, ut ex utroque corpore; quod generatur ex Trapezio mixto-Parabolico ACSOD, & mixto Trapezio LRVTH in se ductis: demi possint corpora facta ex polygonis rectilineis ASOD, AVTH in se ductis: quæ corpora cum sint æqualia per Prop. 26. Huius. Cõstat partes illas æquales auferri posse ex utroque corpore ex Trapeziis mixtis in se ductis genito.

Rursum quia ostensa sunt corpora facta ex ductu polygonorum rectilineorum ACSOD, & LRVTH in se, æqualia esse. Et utrumque minus est corpore; quod fit ex ductu Trapeziorum mixtorum Parabolicorum ACSOD, LRVTH in se: Poterunt illa corpora ex his tamquam horum partes auferri. Quæ subtractio cum possit in infinitum institui, multiplicatis in infinitum polygonorum lateribus, magis magisque semper ad parabolam accedentibus. Quid obstat, quominus concludamus ex allato axioma Propositione præcedenti, genita corpora ex utraque figura mixta, arcu ACS, rectisque lineis AD, DO, OS; & arcu LRV, rectisque lineis LH, HT, TV comprehensa in se ducta; æqualia esse inter se. Quare positum adhuc, &c. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

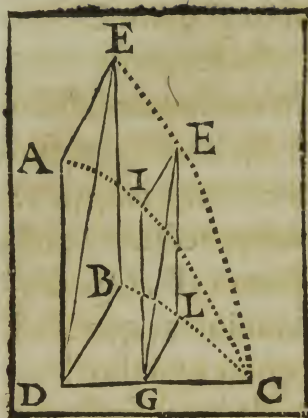
Ex præcedenti discursu manifestum etiam fit, corpora genita ex ipsis integris semisegmentis parabolicis
ACS O

est æqualis axi DA , & ad substratum planum Orthogona: curua verò linea BLC , æqualis Parabolæ AIC . Iam segmentum $DBLC$ in eo situ conceptum, fluere concipiatur, donec linea DB peruenerit ad finem fluxus, nempe ad A . Et situm eundem in A retineat quem obseruauit toto fluxus tempore, nempe rectum; qualis est AE . Descriptum erit tunc à linea DB , Quadratum $DAEB$. Interim aliæ lineæ breuiiores, qualis est GL , eò citiùs ad terminum peruenerunt quò sunt breuiiores (vt Prop. 12. Explicui, quam hic iuuat sigillatim applicare ob rei momentum.) Singulæ tamen describunt Quadratum; vt GL , Quadratum describit $GIFL$. Absoluto motu, habemus corpus circumscriptum superficie Parabolica $DAIC$ substrata: Parabolica item superficie priori æquali, & ad eam Orthogona $DBLC$. Et duabus curuis superficiebus; quarum altera generatur ab omnibus punctis Parabolæ BLC , per fluxum & est superficies curua; quam recta BE , & duæ lineæ curuæ EFC , BLC comprehendunt. Altera est huic æqualis, & generatur ab omnibus lineis motis, dum erectæ stant in termino fluxus super Parabolam AIC substratam, cuiusmodi sunt lineæ AE, IF . Conueniunt verò & se mutuò interfecant duæ illæ curuæ superficies in linea curua communi EFC . His ritè perceptis, quæ sibi mens aptius proponit, quam vlla designatio possit exhibere (quod est solemne in solidis exprimendis in area plana incommodum) si tandem concipiatur planum agi per diametros Quadratorum DE, GF & aliorum omnium transiens per lineam curuam

R EFC ,

Fig. 16

Fig. 16.



EF C, & rectam DC (extenditur enim per lineas parallelas DE, GF quæ diametri sunt Quadratorum) diuidet planum hoc, vt patet, corpus ex segmento Parabolico DAC in se ducto generatum, in duas partes æquales. Harum ergo alteram voco cum Geometra Vngulam, ob similitudinem vngulæ equinæ ; præsertim si loco semifragmenti, totum segmentum in se ducatur, vt integra appareat vngula.

Porro superficies illa curua, quæ lineis super Parabolam AIC perpendiculariter erectis super planum substratum ADC; componitur: Cylindrus est Parabolicus, vel eius pars: sicut & altera ei æqualis, quam efformant lineæ BE, LF & aliæ huiusmodi à Parabola BLC perpendiculariter erectæ ad planum DBC.

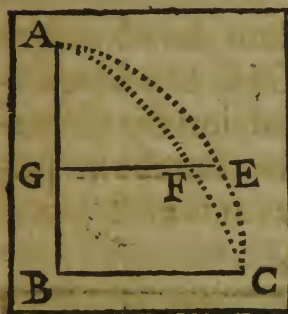
Fig. 16.

Quæcunque demum hic exposui adhibito segmento Parabolico: quod abscindit ordinatim applicata DC recta ad axem AD: eadem reliquis segmentis parabolicis, quæ ab obliquis ordinatim Applicatis abscinduntur, quale est segmentum LHI in figura superioris Propositionis 28. æquè conueniunt: his tamen hic etiam obseruatis, quæ supra Prop. 12. Circa planorum obliquorum in se ductum, obseruanda monui.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

Sit Parabolæ AFC diameter AB . Dico nullam aliam Parabolam: cuius eadem sit diameter AB , idemque vertex A ; describi posse; quæ cum Parabola in alio puncto quam in A conueniat.

*Præparatio.**Figura Decimaseptima.**Fig. 17*

Sit enim, si fieri potest, alia Parabola AEC quæ cum Parabola AFC conueniat in C . Ducatur ordinatim Applicata CB , ad diametrum AB : alia item ducatur ad eandem diametrum ordinatim Applicata EFG secans vtramque Parabolam in E & F .

Demonstratio.

Vt sagitta BA , ad sagittam GA : ita est quadratum ordinatim Applicatæ BC ad quadratum ordinatim Applicatæ EG in Parabola AEC ; & ita etiam ad quadratum ordinatim Applicatæ EG in Parabola AFC per 20. lib. 1. Appollonij. Quadrata ergo linearum inæqualium GE , GF . Sunt æqualia. Quod est absurdum. Quare si sit Parabolæ, &c. Quod erat probandum.

R

2

Corollæ

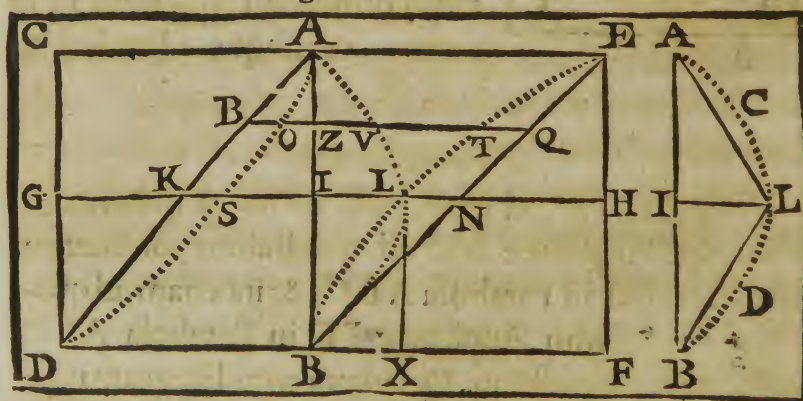
Corollarium.

Hinc necessariò sequitur vt si duarum Parabolarum sagittæ, & ordinatim Applicatæ congruant: Id est, si sint æquales, & angulos æquales comprehendant ipsæ etiam Parabolas congruere; earumque curuitatem in infinitum productam, eandem vtriusque futuram.

P R O P. XXXI. T H E O R.

Si linea quælibet AB bifariam & ad angulos rectos secetur in I à linea GH . Duabus autem lineis AB , AI tertia proportionalis statuatur IL . Erit AB latus rectum Parabolæ per puncta A, L, B transeuntis, cuius axis est LIG .

Figura Decima octaua.



Demonstratio.

Fig. 18. Cum tres lineæ AB , AI , IL sint continuè Proportionales ex hypothesi. Erit Quadratum mediæ AI æquale

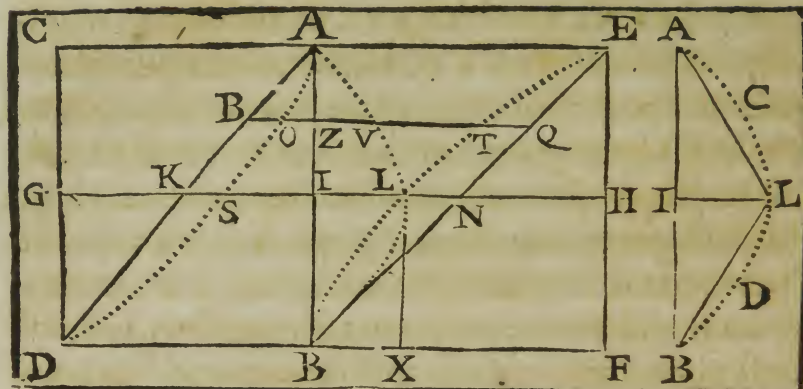
æquale rectangulo sub prima AB , & tertia IL . Si ergo Parabola ALB describatur: erit ordinatim Applicata AB ad eius axem LI . cum bifariam in I & ad angulos rectos secetur à linea LI : & eius latus rectum erit AB . Siquidem hæc est lateris recti Parabolæ cuiusvis, proprietas vt rectangulum sub latere recto, & abscissa sagitta per ordinatim Applicatam, æquale sit Quadrato ordinatim Applicatæ sagittam abscindentis. Vnicam verò Parabolam per tria illa puncta A, L, B , describi posse patet per Prop. 30. Præcedentem. Quare si linea quælibet, &c. Quod erat demonstrandum,

PROP. XXXII. THEOR.

In eadem figura. Si duo Quadrata AD, AF super AB describantur. Describantur autem duæ Parabolæ; ASD , cuius axis sit AC , vertex A ; & BLE , cuius axis sit BF , vertex B . Quarum latus rectum sit AB , idem quod Parabolæ ALB superiori propositione descriptæ. Dico hæc tres Parabolæ ASD, ALB, BLE æquales esse, id est, si earum axes superponantur; fore vt Parabolicus ambitus earum mutuò congruat à vertice in infinitum productus.

Preparatio.

Ducatur per L verticem Parabolæ ALB linea LX , Fig. 18. ad eius axem IL perpendicularis.

*Demonstratio.*

Probandum in primis est, LX esse ordinatim Applicatam ad axem BF Parabolæ BLF. Atque adeo Parabolam hanc secare Parabolam ALB in ipso illius vertice L. Hoc ergo ita notum euadet. Sagitta IL est quarta pars lateris recti AB. Nam in Antecedente propositione. Ita est ex constructione AB ad AI, ut AI ad IL. Sed AB dupla est lineæ AI. Ergo AI dupla est etiam lineæ IL. Ergo AB siue BF quadrupla est lineæ IL siue BX. Si ergo per punctum X intelligatur duci ordinatim Applicata ad axem BF Parabolæ BE; (quam positione congruere necesse est cum lineæ XL, licet nondum constet congruere longitudine) ita se debet habere Quadratum Applicatæ FE ad Quadratum Applicatæ per X ductæ: ut se habet linea BF ad lineam BX. Sed BF ostensa est quadrupla lineæ BX. Ergo quadratum Applicatæ FE, quadruplum est quadrati Applicatæ per X ductæ. Quadratum

dratum autem Applicatæ FE, est quadruplum Quadrati lineæ LX, quæ lineæ FE semissis est; ergo ordinatim Applicata per X, non tantum positione congruit cum lineâ LX sed etiam longitudine: hoc est, Parabola BE transit per L, verticem Parabolæ ALB. Quod cum ita sit. Cum duarum Parabolarum ALB, BLE, sumptis æqualibus sagittis LI, BX æquales sint ordinatim Applicatæ BI, LX: & æquales angulos, nempe rectos contineant: dubium non est quin Parabolarum ambarum curuitas sit æqualis à vertice L & B in infinitum extensa per Prop. 31. Cum verò par in omnibus sit ratio Parabolarum ASD, & BLE, nec, nisi solo situ, qui subalternus est, discrepent. Concludendum est, trium illarum Parabolarum eandem esse curuitatem. Quod concludendum erat.

RROP. XXXIII. THEOR.

Iisdem in eadem figura positis: tribus scilicet descriptis Parabolis ASD, BLE, ALB, in eo situ intra Quadrata AD, AF, quò iam descriptæ sunt. Dico solidum quod fit ex Parabolæ ALB ductu in se: æquari solido quod generatur ex superficie mixta ASDB, in parem mixtam superficiem BLEA subalterne positam.

Demonstratio.

Hæc eadem est propositio: quam affert, & suo more accuratè demonstrat Geometra, Prop. 42. lib. 10. vt constabit, vbi ostendero Parabolam meam ALB eandem

dem esse cum Parabola, quam ibidem descriptam supponit. Quod ita per Prop. 31. Huius euidenter ostendo; Nam supponit ipse sagittam IL Parabolæ suæ tertiam esse proportionalem duabus AB , (siue GI) & AI . Hoc ego idem supposui Prop. præcedenti. Applicata verò illius, meaque est eadem AI ad eandem diametrum LI , & ambæ angulos æquales, nempe rectos continent. Ergo idem debet esse vtriusque Parabolæ

Fig. 18. ambitus, eadēque curuitas per citatam Propositionem nostram. Hoc demum ita declarato Propositionis huius demonstratio ex Authore peti debet: cum tota ex multis aliis eius principiis pendeat: quæ abs re fuerit hîc repetere, cum mihi solum exponendæ veniant propositiones, quæ proxime attingunt primariam illam, & ad quam tantum opus totum refertur, ad circuli quadraturam, pertinentem.

PROP. XXXIV. PROBL.

Solidum. Quod ex plano mixto $ASDB$ ducto in planum mixtum $BLEA$, hoc est, in se subalterne positum, oritur; cubare, siue, in corpus planis, rectilincisque superficiebus circumscriptum mutare.

EXPOSITIO.

Fig. 18. Cum corpus ex illis mixtis superficiebus subalterne positum in se ductis genitum, æquale sit per Prop. 33. Corpori genito ex Parabola ALB in se ducta. Corporis verò illius dimidium sit vngula Parabolica vt supra Prop. 29.

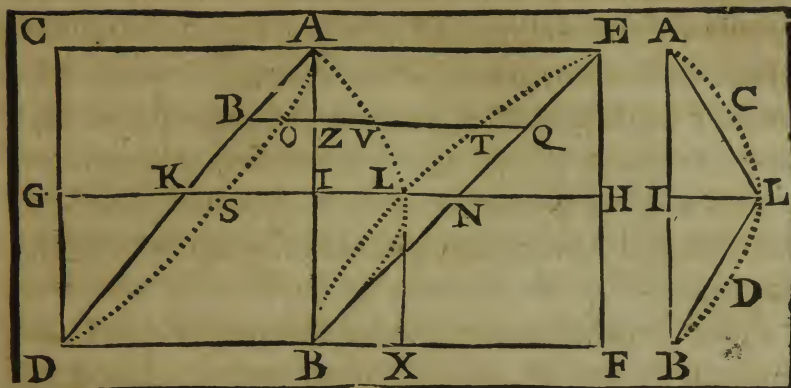
quæ refecatur ad verticem totius vngulæ, plano secante: quod partem quartam altitudinis vngulæ abscindit. Hanc verò minorem vngulam ostendit Prop. 95. Esse vnam è triginta duabus partibus; in quas diuidi tota vngula concipi potest. Quibus stabilitis ignorari non potest vngulæ propositæ solida quantitas vel Geometricè, vel Arithmeticè (vt maxime intendo) inuestigata.

Nam in primis triangulum rectilineum ALB (quod basis est Pyramidis, eiusdem cum vngula altitudinis) notum est. Nota etiam est eius altitudo IL . Ergo nota est ipsa Pyramis.

Fig. 18. Secundò basis Parabolica ACL segmenti Cylindrici, nota est in mensura rectilinea, est enim sexta pars trianguli ALB rectilinei, cum enim ostendat Archim. lib. 2. de Parabola. Prop. 24. & Geometra lib. 5. Prop. 232. Parabolam $ACLB$ esse sesquitertiam trianguli ALB . Duo segmenta Parabolica ACL , BDL simul, sunt tertia pars trianguli ALB . Ergo alterum eorum segmentorum, verbi gratia, ACL est sexta pars eiusdem trianguli. Atque adeo nota. Altitudo verò segmenti Cylindrici super basi ACL erecti, est IL nota. Ergo etiam nota est quantitas solida segmenti huius Cylindrici in rectilineis: mutata scilicet eius base Parabolica ACL in sextam partem trianguli ALB .

Tertiò denique. Cum minor vngula supradicta, sit vna ex triginta duabus partibus totius vngulæ, id est, ita se habeat ad totam vngulā, vt vnum ad triginta duo; si ea bis sumatur (vt sumi debet ad complendā totam vngulā vnā.

Figura Decima octaua.



vnâ cum Pyramide & Cylindro Parabolico, de quibus *Fig. 13.* paulo ante dictum est) erit ad totam eandem vngulam, vt duo ad triginta duo. Et Diuidendo. Ita est vngula hæc minor bis sumpta, ad id quod reliquum est ex tota vngula; id est, ad Pyramidem & segmentum Cylindricum simul; vt duo ad triginta; siue, vnum ad quindecim. Si igitur solida quantitas ex Pyramide, & segmento Cylindrico composita, iam nota; diuidatur in partes quindecim æquales; & vna ex illis addatur ad compositam quantitatem ex Pyramide & Cylindro; nota euadet totius vngulæ quantitas: ipsumque adeo solidum ex ductu planorum mixtorum in propositione assignatorum: si nimirum inuenta soliditas vngulæ duplicetur. Quomodo verò Geometricè Pyramis illa & Cylindrus Parabolicus in quantitatem vnicam coalescant; passim apud Geometras habetur; & notum euadet inferius: Vbi per numeros solutionem problematis aggrediar. Sed vtrouis modo positum Problema soluere placeat, Geometrico vel Arithmetico; quod

S 2

subdo

subdo theorema, maximum compendium allaturum est.

PROP. XXXV. THEOR.

Pyramis, cuius Basis est triangulum maximum ALB Parabolæ inscriptum, ad Cylindrum, cuius Basis est segmentum ACL Parabolicum; altitudo verò vtriusque est eadem, nempe IL, habet proportionem duplam.

Demonstratio.

Fig. 18. Nam Prisma, cuius basis est triangulum ALB, idem quod basis est Pyramidis: altitudo verò vtriusque eadem IL: est triplum Pyramidis per 7. lib. 12. Quia vero segmentum Parabolicum ACL ostensum est Prop. 34. num. 2. esse partem sextam trianguli ALB. Erit Prisma sextuplum Cylindri eiusdem altitudinis super basi Parabolica ACL. Ergo Pyramis erit eiusdem Cylindri dupla. Quod erat probandum.

PROP. XXXVI. PROBL.

Solidum, Quod Prop. 34. Geometrice inuestigatum est, in numeris notum facere.

Constructio.

Fig. 18. Eadem exponatur Parabola ALB quæ in se ducta solidum, quod inuestigatur, producit. Quod, ut supra citata propositione exposui, duas continet vngulas Parabolicas. Quarum vnam, quod satis est, cum sint

sint æquales; in solidum rectilineum paulo ante converti. Iisdem ergo omnibus suppositis quæ Prop. 34. supponebantur. Posito scilicet latere recto AB : & linea IL tertia proportionali duabus datis AB , AI . Ita Arithmetice Problema solvemus.

Posita AB partium 2. eius semissis AI erit 1; & IL , cum his duabus tertia sit proportionalis, erit $\frac{1}{3}$. Ex his datis, quod quæritur definiendum est; inuentis scilicet, Pyramide cuius basis est triangulum ALB , & altitudo IL : Cylindro Parabolico, cuius basis est segmentum Parabolicum ACL , & altitudo eadem IL . Denique parte decimâ quintâ aggregati ex Pyramide & Cylindro: quæ eidem aggregato addatur ad totam vngulam complendam Ex his enim tribus quantitativus constat, ut Prop. 34. Expositum est. Pyramis habetur, ducta AI . 1, in IL $\frac{1}{3}$ ut habeatur area trianguli ALB , siue baseos Pyramidis, $\frac{1}{6}$. Huius area tertia pars est $\frac{1}{18}$. Quæ ducta in altitudinem IL $\frac{1}{3}$ gignit $\frac{1}{54}$ soliditatem Pyramidis.

Cylindrus Parabolicus baseos ACL , & altitudinis IL . Est dimidia pars Pyramidis, ut Propositione Antecedente ostendi, ergo Cylindrus ille est $\frac{1}{18}$. Pyramis $\frac{1}{18}$ & Cylindrus $\frac{1}{18}$ simul efficiunt $\frac{1}{9}$ siue, assumptis minimis terminis $\frac{1}{8}$. Huius decima quinta pars est $\frac{1}{120}$ hæc addita ad $\frac{1}{8}$ Pyramidem & Cylindrum simul, producit $\frac{16}{120}$ siue, $\frac{2}{15}$ pro soliditate tota vngulæ. Hæc duplicetur: habebitur $\frac{4}{15}$ soliditas corporis ex Parabola ALB in se ducta, geniti. Quod idem est, cum eo; quod producit ducta superficie

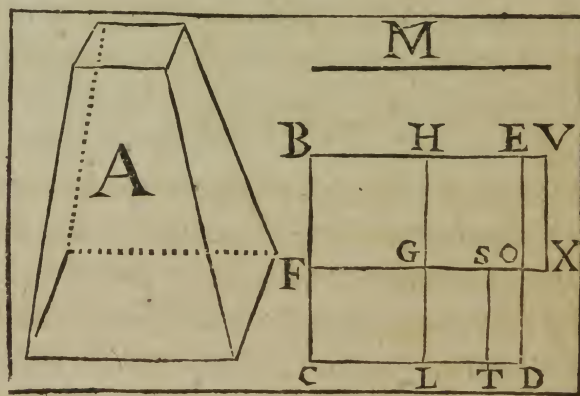
S 3 mixta

mixta ASDB; in mixtam superficiem BL, EA, siue in se subalterne positam. Solidum ergo, quod & notum in numeris fecimus.

PROP. XXXVII. PROBL.

Fig. 19. Trapezium solidum, siue truncatam Pyramidem: cuius duæ oppositæ facies Quadratæ sint & parallele; ex notis lateribus, & altitudine; notam facere Geometricè, & Arithmeticè.

Figura Decimanona.



Constructio.

Datum sit Trapezium solidum A eius Rationis; quæ in propositione assignatur, cuius altitudo sit M. Soliditas eius Geometricè quæritur: id est. Quæritur Parallelepipedum ei æquale. Quod cum sit regulare; & ad formam cubi (qui solidorum mensura est) accedat, & in illum mutari debeat, tunc Geometricè aut notum, aut nosci aptius erit. Exponatur eius basis Quadrata BD: in qua superior facies ei opposita, item Quadrata

ta

ta designetur BG, & productis eius lateribus FG, & HG
vsque ad O & L, erit Quadratum GD: cuius latus LD,
est excessus lateris CD baseos, supra latus CL siue FG
faciei, superioris oppositæ. Diuidatur Quadratum
GD in tres partes æquales, diuiso eius latere GO tri-
fariam cuius OS sit pars tertia: ductaque ST parallela
lateri GL. Deinde tribus lineis, EO, lateri minoris
Quadrati; OD, differentię laterum; SO, tertię parti
huius differentię; quarta proportionalis inueniatur.
cui æqualis ponatur OX & EV; ducta etiam VX.
Dico rectangulum BX esse basim parallelepipedo, sub
altitudine data M, æqualis Trapezio solido A.

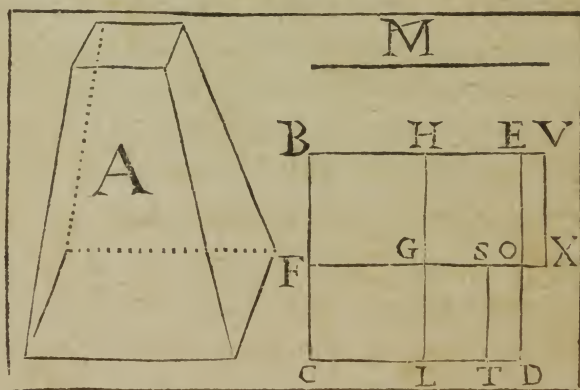
Demonstratio.

Trapezium A maius est parallelepipedo, cuius basis *Fig. 19.*
est Quadratum minus BG, siue superior eius facies, &
altitudo data M; duobus Prismatibus æqualibus, quorū
bases sunt duo rectangula GC, GE contenta sub la-
tere GF minoris Quadrati, & GL excessu lateris ma-
ioris Quadrati GD, supra minus CL; & præterea Py-
ramidi, cuius basis est quadratum GD. Sed duo illa
Prismata simul, æqualia sunt parallelepipedo; cuius ba-
sis est rectangulum HO; & altitudo eadem nempe M.
Pyramis verò cum sit per 7. lib. 12. Tertia pars parallele-
pipedo; cuius basis est Quadratum GD & altitudo M:
erit parallelepipedum cuius basis est rectangulum SD,
(tertia scilicet pars Quadrati GD) & altitudo M, æqua-
le huic Pyramidi. Sed per 31. lib. 11. Parallelepipedo
aliud æquale est Parallelepipedum, eiusdem altitudinis
M:

M : cuius basis est rectangulum E X. Nam duo rectangula E X, S D æqualia sunt per 16. lib. 6. Contenta scilicet sub duabus extremis E O, O X, & sub duabus mediis S T, S O quatuor proportionalium. Inuentum est ergo Parallelepipedum dato corpori A æquale. Quod notum Geometricè facere propositum erat.

Fig. 19. Sed Arithmeticè hoc idem præstabimus ex iisdem datis, lateribus scilicet Quadratorum & altitudine M.

Figura Decimanona.



Sit in primis data altitudo M. 10. Latus verò maius BE, 7. Cuius Quadratum BD est 49. Latus minus BH 4. Cuius Quadratum 16. Differentia laterum B E, B H; est H E 3, cuius Quadratum G D 9. Ablato ergo Quadrato B G 16 ex Quadrato B D 49: remanet gnomon H D F 33. Ablato item ex gnomone, Quadrato G D 9: remanent duo rectangula æqualia G E, G C 24. Ergo alterum ex illis nempe G E, est 12. Quod cum Quadrato G B 16, efficit rectangulum B O, 28: cui addendum est rectangulum S D, vel ei æquale E X tertia scilicet pars Quadrati G D 9, quæ est 3. Fiet ergo area totius

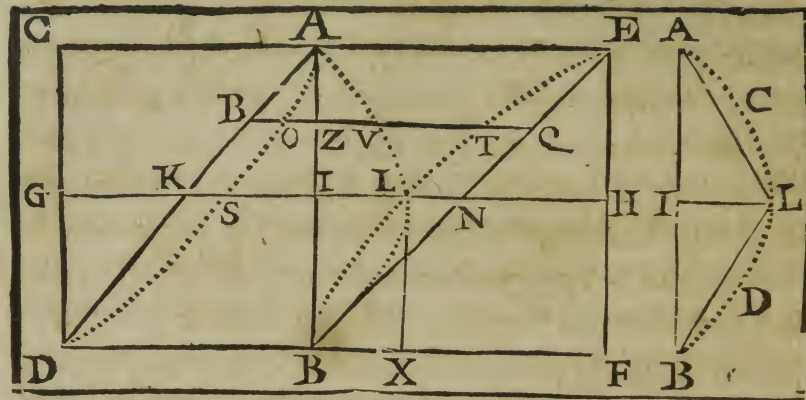
tòtius rectanguli BX 31. Quæ ducta in altitudinem datam M 10, Fiet tota soliditas corporis A , 310.

Tota ergo ratio huiusmodi truncatas Pyramides per numeros inuestigandi, paucis hoc modo tradi potest. Ducatur latus BF minoris Quadrati, in maioris latus BE : & rectangulo facto FE addatur SD tertia pars Quadrati GD , differentia laterum, vt fiat totum rectangulum BX : Quod in altitudinem corporis A ducatur. Fiet enim Parallelepipedum æquale corpori A . Huius præcepti demonstratio illa ipsa est; quam ad methodum Geometricam soluendi Problematis paulò ante exposui.

PROP. XXXVIII. PROBL.

Si in figura Propositionis 31. hic repetita du- *Fig. 18.*
cantur duæ quælibet Parallelæ OT , SL (licet hæc sit axis Parabolæ ALB) secantes in O & T ; item in S & L ; duas Parabolas subalterne positas Parabolam verò ALB , in V & L . Et denique ordinatim Applicatam AB , in Z & I . Et oporteat solidam quantitatem reperire tum Geometricè, tum Arithmeticè corporis: quod fit ex ductu mixtæ superficiei contentæ lineis rectis OZ , ZI , IS & Parabolica OS ; in mixtam superficiem clausam lineis rectis TZ , ZI , IL & Parabolica TL .

Huius ferè solius Problematis causa, ea omnia à me *Fig. 18.*
tradita sunt: quæ hæctenus è Geometria repetij tan-
T quam



quam lemmata ad huius solutionem necessaria. Licet enim Geometra vngulam Parabolæ in cubum conuertisset, cum ordinatim Applicata Parabolam abscindens, est recta ad suam diametrum, quæ tunc axis etiam est Parabolæ. Qualis est hic Parabola A L B, ab ordinatim Applicata A B Orthogonâ ad axem L I, abscissa. Attamen nusquam apud eum reperire licuit mentionem eius Parabolæ, quæ ab obliqua ordinatim Applicata
 Fig. 18 abscinditur. Superioribus ergo Propositionibus aliquot, nempe, 22, 23, 24, &c. quamcumque obliquam Parabolam in se ductam solidum generare conatus sum ostendere; quod æquale foret solido genito ex alia Parabola, quam ordinatim Applicata ad axem, abscinderet. Ostendi præterea quænam partes quarumcumque Parabolarum obliquarum, in se ductæ; corpus producerent æquale corpori, quod fieret ex ductu in se partis, Parabolæ ad axem abscissæ. Nunc verò eo deuolutus sum, ut partes ipsas Parabolæ ad axem positæ, absque

absque omni ad alias relatione persequar; & quale corpus in se ductæ producant, inuestigem. Neque enim statim ubi vngulam ex tota Parabola in se ducta profectam in cubum conuerteris: eadem opera singulas partes vngulæ à singulis partibus Parabolæ in se ductis genitas, noras effeceris. Quod tamen omnino necessarium est, ut noua hæc circulum Quadrandi ratio absolua-
 uatur; tum etiam ut eiusdem veritas, aut falsitas certa fiat & aperta. Hunc ergo nodum soluamus. Ac in primis supponendum est; quod à Geometra Propos. 42. lib. 10. eiusque corollario primo est obseruatum. Nimirum non tantum Parabolam ALB in se ductam producere solidum æquale solido genito ex ductu superficiei mixtæ $ASDB$, in mixtam superficiem $BLEF$: sed etiam qualibet duas parallelas, quales sunt OT , SL ; intercipere ex dictis superficiebus partes mixtas $OZIS$, $TZIL$; quæ in se ductæ producant corpus æquale corpori, quod oritur ex parte $ZVLI$ Parabolæ ALB , inter easdem parallelas interceptâ, in se ductâ. Inuestigamus ergo hoc Problemate solidam quantitatem partis huius $ZVLI$ in se ductæ.

Constructio & Demonstratio.

Exponatur in altera figura confusionis vitandæ cau- Fig. 20.
 sa, Parabola ALB ; ductis in ea parallelis $ILZV$: quæ ad libitum duci possunt; in hoc tamen exemplo ita ducuntur, ut IL sit axis; altera verò ZV bifariam in Z , secet ordinatim Applicatam AI : tandem ducantur VL ; & VX parallela Applicatæ AI , siue perpendicularis ad

T 2 axem

duplicetur, & sumatur altitudo IX semel tantum: fiet
 per Propos. 9. lib. 12. parallelepipedum priori æquale.
 Vtrius autem modo generetur parallelepipedum; ad *Fig. 20.*
 iam factum primum parallelepipedum applicari pote-
 rit iuxta faciem ZX quæ in utroque reperitur, atque
 ita ex duobus unicum parallelepipedum conflari. Sed
 restat ut ducatur semisegmentum VLX in se, ut to-
 tum habeatur corpus ex totâ mixtâ figurâ $ZVLI$ in
 se ductâ genitum: illud autem notum fiet, si producta
 VX , donec Parabolæ occurrat in S . Segmenti $VL S$
 vngula, in solidum rectilineum conuertatur per Pro-
 pos. 34. Est enim vngula totius segmenti $VL S$ æqualis
 corpori facti ex ductu in se semisegmenti VLX : tam
 enim vngula segmenti $VL S$, quam corpus ex semi-
 segmento VLX in se ducto genitum, est dimidia pars
 corporis ex ductu totius segmenti $VL S$ in se, geniti:
 ut exposui suprâ Prop. 29. habito verò rectilineo cor-
 pore, æquali corpori, quod semisegmentum VLX in
 se ductum producit; Applicabitur illud ut Geometria
 docet, ad superius iam formatum parallelepipedum:
 ut unicum fiat parallelepipedum æquale corpori. Quod
 mixta figura $ZVLI$ in se ducta producit. Quod hac
 propositione fieri iubebatur.

Poterat etiam ita Problematis solutio iniri, ut Tra- *Fig. 20.*
 pezium $ZVLI$ in se duceretur; & inde corpus geni-
 tum, per Prop. 37. in parallelepipedum conuerteretur.
 cui addi deberet corpus ex segmento Parabolico VTL
 ducto in Trapezium $ZVLI$ bis; vel in rectangulum,
 cuius basis est, ZI , & altitudo composita ex lateribus

T 3 IL,

IL, ZV Trapezij (est enim rectangulum hoc æquale duplo Trapezij ZVLI) iisq̃ue solidis duobus, tandem corpus ex segmento VTL in se ducto genitum, adiungeretur. Fieretque ita notum in rectilineis solidum ex mixta figura ZVTLI in se ducta genitum.

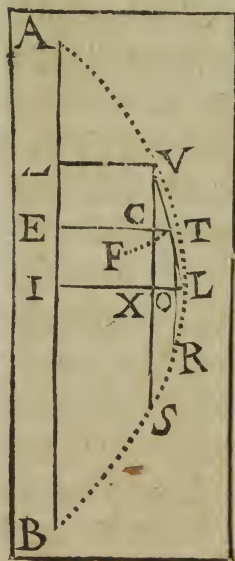


Fig. 20.

Ne cui verò negotium faceſſat ductus ille ſegmenti Parabolici VTL in rectangulum duplum Trapezij ZVLI cum lineæ VL, æqualis non ſit baſis ZI, vnde motus iniri debet: quod tamen neceſſarium eſt ad ductum figuræ in figuram; in memoriam & uſum hic reuocanda ſunt quæ ſuprà Propoſ. 23. Oſtendi: nimirum ſegmēta illa omnia Parabolica æqualia eſſe, quæ diametris æquali inter ſe ſpatio diſtantibus intercipiuntur; & præterea in ſe ducta, ſolida æqualia producere iuxta Propoſitionē 28.

Quare diuidatur VL bifariam in F (ob loci anguſtias F ad punctum diuiſionis non apponitur, ſed ad illud lineola connectitur) & per F ducatur FT diameter Parabolæ axi LI parallela: quæ bifariam ſecabit in C rectam VX per 2. lib. 6. Deinde ex puncto T ducatur TO ordinatim Applicata ad axem: erit TO æqualis rectæ CX; atque adeò rectæ CV. Cum igitur VC & TO metiantur diſtantiā punctorum V & T à ſuis diametris TE, LI; æqualia erunt ſemiſegmēta VTF, & TLO: eſi in ſeipſa ducantur; æqualia ſolida generabunt

bunt iuxta Propositionem 28. eiusque Corollarium: imò & ipsa integra segmenta suo in se ductu singula, exhibebunt solida inter se æqualia. Ad hæc Applicata T O producta ultra axem donec occurrat Parabolæ in R, erit æqualis lineæ V X, siue lineæ Z I, quæ est basis Trapezij Z V L I, vnde motus incipit: quare segmentum T L R duci poterit in Trapezium Z V L I, appositâ T R, Trapezij basi Z I, cui est æqualis, & orietur ex eo ductu Cyldraceum quoddam Parabolicum, cuius basis erit ipsum segmentum T L R; altitudo verò maior, erit I L, minor Z V. Sed quia bis sumi debet solidum ex segmento V T L, aut ei æquali T L R ducto in Trapezium Z V I L; solidum illud vnica operâ habebitur; si duo inæqualia latera Z V, I L simul iungantur, & in rectangulum, cuius vnum latus est Z I, alterum verò ex duobus lateribus Z V, I L Trapezij conflatur, ducatur segmentum T L R. Fiet enim hoc modo Cyldraceum, cuius basis est segmentum T L R, notum in rectilineis; altitudo verò conflata ex notis lateribus Z V, I L Trapezij, atque adeo nota, notumque ex his solidum ipsum Cyldraceum. Quod ad solidum ex ductu Trapezij in se, & ad solidum ex ductu segmenti T L R etiam in se, iungetur vt fiat vnicum solidum, quod oritur ex ductu in se plani mixti Z V T L I, cuius quantitas nota erit, cum singulæ eius partes in rectilineis notæ fieri possint. Quod si segmentum V T L sui extremo L, axi ipsi L I non adhæreat: poterit nihilominus, ei æquale ad axem fieri segmentum T L R sumpta sagitta L O æquali sagittæ T F, ductaque Applicata

Fig. 26

Applicata TR sunt enim in Parabola, illa omnia segmenta æqualia, quorum sagittæ sunt æquales per Prop. 24. Huius. Ex hac constructione Geometrica Arithmetica colligemus in eum qui sequitur modum.

Fig. 20. Servata ergo eadem suppositione propositionis 34. & 36. Posito scilicet latere Recto AB. & eius dimidio AI. Vnde fit, ut IL sit quarta pars lateris Recti, ut Propof. 32. est demonstratum. Supponamus parallelam ZV bifariam dividere in Z, ordinatim Applicatam AI. Quibus ita constitutis. Assumo, ut prius Prop. 36. assumpsi, AB latus Rectum esse 2. erit AI. 1. & IL $\frac{1}{2}$. Erit ergo ZI etiam $\frac{1}{2}$ quandoquidem semissis est Applicatæ AI, quæ est 1. Quia verò VX æqualis est lineæ ZI. per 34. lib. 1. in rectangulo ZX; erit & ipsa VX $\frac{1}{2}$. Restant LX & IX cognoscendæ; quas sic venabimur. Ut se habet Quadratum AI, quod est 1. Ad Quadratum lineæ VX $\frac{1}{4}$, quod est $\frac{1}{4}$: ita se habet linea IL $\frac{1}{2}$ ad lineam XL per Prop. 20. lib. 1. Appollini. Ergo XL, est $\frac{1}{8}$, quæ si dematur ex tota IL $\frac{1}{2}$: remanebit IX, & illi æqualis ZV $\frac{1}{8}$. His omnibus habitis, quæ in Synopsim memoriæ causa reduco.

AB — 2	IX	} $\frac{1}{8}$	Rectangulum ZX sub lateribus IZ, $\frac{1}{2}$ & IX $\frac{1}{8}$ est $\frac{1}{16}$. Rectangulum hoc duci debet in se; duci, inquam, iuxta ductuum doctrinam, debet scilicet rectangulum rectangulo ZX æquale super
AI — 1	ZV		
IL — $\frac{1}{2}$	XL — $\frac{1}{8}$		
ZI — $\frac{1}{2}$			

super basim ZI erigi perpendiculariter ad ZX : tum fluere donec ad latus oppositum VX pervenerit. Quo fluxu parallelepipedum efformatur; cuius basis est rectangulum $ZX \frac{1}{16}$ proximè inuenta. Altitudo verò est recta $IX \frac{1}{8}$. Si igitur basis $\frac{1}{16}$ multiplicetur in altitudinem $\frac{1}{8}$ fiet soliditas huius parallelepipedi $\frac{2}{128}$. huic parallelepipedo $\frac{2}{128}$ addi debet solidum duplex; nempe solidum quod fit ex ductu semifegmenti VLX in rectangulum ZX bis. Deinde solidum genitum ex eodem semifegmento ducto in se



Primum sic notum fiet. Inquiratur area semifegmenti VLX hoc modo. Ad lineam $VX \frac{1}{2}$ addatur una tertia eius pars (quæ est $\frac{1}{6}$.) Fiet linea composita $\frac{2}{3}$. eius semissis $\frac{1}{3}$ ductus in $LX \frac{1}{8}$; exhibet, ut paulò post demonstrabo, aream semifegmenti $VLX \frac{1}{24}$. Hæc ergo area ducta bis in altitudinem $IX \frac{1}{8}$ hoc est, in IX duplicatam (hoc est $\frac{3}{4}$) producet solidum ex eo ductu genitum $\frac{3}{96}$ siue $\frac{1}{32}$. Quod autem semissis lineæ compositæ ex VX & tertia eius parte, si ducatur in XL

producat aream segmenti VLX , probatur. Nam sicut totum segmentum VLX est sesquitertium trianguli VLX . Ita semifegmentum est sesquitertium trianguli VLX . Sed area trianguli cuius basis est sesquitertia ad lineam VX & altitudo XL est etiam

V sesqui

sesquitercia areæ trianguli V L X. Ergo, &c.

Secundum verò nempe solidum ex ductu semisegmenti V L X in se, genitum in hoc exemplo breuiter definietur ope vngulæ Prop. 36. in solidum rectilineum conuersæ. Cum enim, vt paulò ante demonstraui, linea X L sit quarta pars diametri L I totius segmenti A L I. Erit vngula segmenti V L S minoris, ad vngulam segmenti A L B maioris vt 1. ad 32. vt Prop. 95. lib. 9. Geometra demonstrauit. Vngula autem segmenti A L B reperta est superius Prop. 36. esse $\frac{1}{15}$ posito latere Recto A B 2. sicut hic ponitur. Ergo hæc vngula segmenti V L S, erit $\frac{1}{160}$ hic enim numerus est vna ex duabus & triginta partibus numeri $\frac{1}{15}$.



Fig. 20. Hæc basis ducta in altitudinis X L $\frac{1}{8}$, partem tertiam $\frac{1}{14}$, gignit $\frac{1}{384}$ soliditatem Pyramidis.

Cylindrus Parabolicus supra segmentum V T L est semissis Pyramidis per Propos. 35. Ergo est $\frac{1}{768}$.

Cylindrus cum Pyramide additus producit $\frac{1}{768}$ siue, in minimis terminis $\frac{1}{256}$. Huius solidi decima quinta pars

pars $\frac{1}{40}$ iuxta præscriptum Propositionis 34, addi debet ad Cylindrum & Pyramidem simul, id est, ad $\frac{1}{768}$ ut tandem producat peracta operatione $\frac{1}{240}$ soliditas vngulæ segmenti VLS: eadem, quæ præcedenti solutione inuenta fuerat, quæ eadem est cum soliditate, quam semisegmentum VLX in se ductum producit. Hæc enim duas semiungulas semisegmenti VLX continet. Hoc est, totam vngulam totius segmenti VLS.

Addamus iam tria hæc inuestigata solida nimirum rectanguli ZX in se ducti. quod est $\frac{9}{288}$, semisegmenti VLX bis ducti in rectangulum ZX. quod est $\frac{1}{12}$ & semisegmenti eiusdem VLX in se ducti. quod est $\frac{1}{240}$. Producet corpus $\frac{311}{3840}$ ex ductu figuræ mixtæ ZVLI in se, ut peracta horum numerorum additione & reductione cõstabit. Hic ergo numerus seponatur $\frac{311}{3840}$, & diligenter obseruetur hinc olim repetendus.

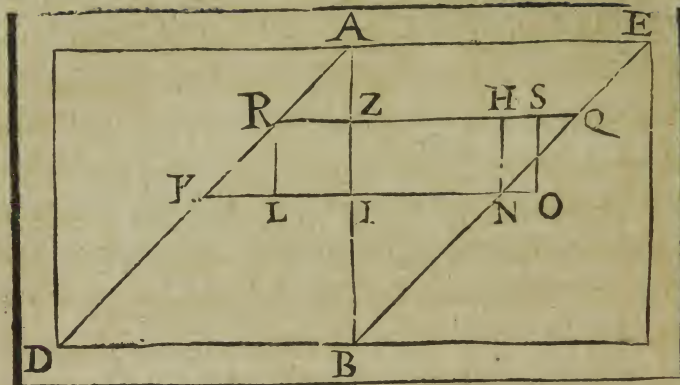
PROP. XXXIX. PROBL.

Assumptis ex figura Propositionis 31. Quadratorum duorum diametris AD, EB & duabus parallelis RQ, KN secantibus axem in Z & I. Solidum inuestigare, quod producit ex Trapezio RZIK in Trapezium ZQNI ducto. Fig. 21.

Constructio.

Expediatur lucis gratiâ ex figura Propositionis 31. Fig. 21.
Descriptio sola hic necessaria in Propositione assignata, & præterea ducantur RL, NH; axi AB parallelæ.

V 2 Solidum



Solidum quod hic quaeritur, gigni debet ex rectangulo RI, in rectangulum ZN. Item ex eodem rectangulo RI in triangulum HQN. Et ex triangulo RLK tam in rectangulum ZN, quam in triangulum HQN subalterne positum per Applicationem adductus, Propositionis huius ad Propositionem 1. lib. 2. Eucl. afferri solita ex Commandino. Si duæ secantur utcumque: rectangulum sub totis æquale est rectangulis, quæ sub singulis segmentis vnus & quolibet segmentorum alterius continentur.

Fig. 21. Solidum ex rectangulo RI, in rectangulum ZN ducto notum est: est enim parallelepipedum notis lateribus constans. Solidum verò ex eodem rectangulo RI in triangulum HQN ducto: Prisma est triangulare, cuius basis est triangulum HQN: & altitudo ZR vel IL: eadem videlicet cum altitudine solidi ex rectangulo RI in rectangulum ZN geniti. Vnde fit, ut si HQ bifariam diuidatur in S, & per S ducatur lineæ HN parallela SO, productam lineam IN secans in

in O. Solidum cuius basis est rectangulum HO; & altitudo ZR; æquale sit triangulari illi Prismati: & præ- Fig. 21.
 terea applicetur ad parallelepipedum ex rectangulo RI in ZN genitum, & vnicum cum illo parallelepipedum constituat. Quod applicetur, clarum est. Quod æquale Prismati sit triangulari; ne id quidem obscurum est: sunt enim bases, rectangulum scilicet HO & triangulum HQN æquales, & eadem altitudo. Ergo per 7. lib. 12. sunt duo illa solida æqualia. Potest ergo vnico ductu solidum haberi, genitum ex rectangulo RI in rectangulum ZN & in triangulum HQN: si semissis HS lineæ HQ, addatur ad ZH: vt fiat vnicum rectangulum ex Trapezio ZQNI in quod ducatur rectangulum RI.

Restat vt ducatur triangulum RKL in rectangulum ZN. Et in triangulum HQN, vt solidum habeatur, quod ad iam factum parallelepipedum applicetur. Triangulum RKL ductum in rectangulum ZN producit Prisma triangulare: cuius basis est triangulum RKL, & altitudo ZH. cui est æquale parallelepipedum cuius basis est rectangulum æquale triangulo RKL siue HQN, hoc est, rectangulum HO, & altitudo ZH. solidum verò ex triangulo RKL, in Fig. 22.
 triangulum subalterne positum HQN est sexta pars parallelepipedum; cuius basis est quadratum lineæ HQ & altitudo HN vel HQ (æquales enim sunt) vt ostendi Prop. 20. Coroll. 2. hæc postrema solida duo ex præceptis Geometricis facile ad parallelepipedum paulò antea iam efformatum applicabuntur, vt vnum integrum

V. 3 paralle

AB	— — 2	IZ	} — $\frac{1}{2}$	Trapezium Z Q N I.	
AI	} — 1	IL		} — $\frac{1}{2}$	Vtroque in easdem par-
IK		LK			tes diuiso, in quas supra
HS		— $\frac{1}{4}$			&c.
					ctanguli Z I, duo latera

Z I, Z R æqualia paulò ante ostensa, sint $\frac{1}{2}$: eius area erit $\frac{1}{4}$ quam producit numerus $\frac{1}{2}$ in se ductus. Hæc *Fig. 21.* area ducta in IN, 1, altitudinem solidum gignit $\frac{1}{4}$. Ducatur rursus rectangulum Z L $\frac{1}{4}$ in triangulum HQN, siue, in rectangulum illi æquale HO, hoc est ducatur rectangulum Z L $\frac{1}{4}$ in altitudinem HS $\frac{1}{4}$. Fiet solidum $\frac{1}{16}$. Addantur duo hæc solida $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$: produceretur per additionem $\frac{5}{16}$ solidum ex rectangulo Z L, in Trapezium Z Q, N I ducto. Quod idem haberetur (vt supra monui) si rectangulum Z L $\frac{1}{4}$ ducatur in altitudinem integram Z S $\frac{5}{4}$ compositam ex Z H 1, & HS $\frac{1}{4}$ hoc enim modo idem numerus $\frac{5}{16}$ obtinebitur. Restat triangulum R K L ducendum in Trapezium Z Q N I. Hoc est in rectangulum Z N, & in triangulum subalternum H Q N. Primò ergo triangulum R L K, in rectangulum Z N, producit prisma triangulare, vt supra dixi, cuius soliditas habetur ex area trianguli velut basi ducta in altitudinem Z H. Area trianguli R L K est æqualis rectangulo HO (sunt enim duo triangu- la R L K, H N Q æqualia huic verò æquale factum est Geometricè rectangulum HO) quæ fit ex HS $\frac{1}{4}$ in HN $\frac{1}{2}$. Ergo ea est $\frac{1}{8}$. quam si alti- *Fig. 22.* tudo Z H, multiplicet; produceretur $\frac{1}{8}$ soliditas Prismatis : cuius basis est triangulum R L K, & altitudo Z H.

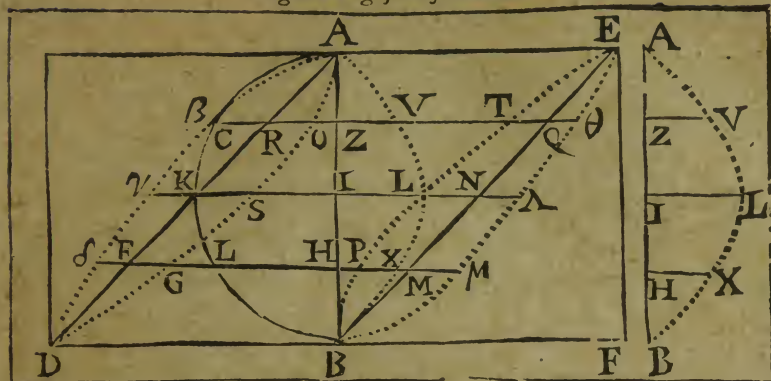
Trian

Triangulum verò idem R L K ductum in triangulum H N Q subalterne positum; gignit solidum: quod est sexta pars (vt Prop. 20. Coroll. 2. ostendi) solidi; cuius basis est rectangulum comprehensum sub lateribus triangulorum subalternorum (quæ latera L K, H Q sunt in nostro casu, æqualia) & altitudo, linea communis, quæ ductus initium est, vt hic R L vel H N. Quare ducatur $KL \cdot \frac{1}{2}$ in $HQ \cdot \frac{1}{2}$; fiet $\frac{1}{4}$ basis solidi. Ducatur hæc basis $\frac{1}{4}$ in R L $\frac{1}{2}$ altitudinem habebitur $\frac{1}{8}$ solidum: cuius sexta pars est $\frac{1}{48}$, soliditas scilicet per Prop. 20. huius trianguli R L K, ducti in triangulum H N Q subalterne positum. quæ si addatur ad soliditatem $\frac{1}{16}$ productam ex triangulo R L K in rectangulum Z N: habebitur soliditas tota, absolutis operationibus, $\frac{1}{12}$ in minimis terminis, quam producit triangulum R L K ductum in Trapezium Z Q N I. Iam verò addi debet proxime inuenta soliditas $\frac{1}{12}$ ad superiùs inuentam $\frac{5}{16}$: vt fiat $\frac{19}{48}$ soliditas producta ex Trapezio R Z I K in Trapezium Z Q N I. Quam numeris exprimere propositum erat. Hic etiam numerus $\frac{19}{48}$ seponatur olim consulendus.

P R O P. XL. THEOR.

Fig. 22. Sint duæ Parabolæ ASD, BLE: quarum vertex sit A & B; latus rectum A B: cui æquales ponantur A E, B D ad ipsum latus rectum normales in A & B: & ducantur A D, E B. Vt habet Propositionis 31. hypothesis. Ducantur deinde binæ parallelæ quæcunque, quouis spatio inter se dista,

Figura Vigesima secunda.



fitæ, vt RQ, KN. & binæ iterum parallelæ quæcumque RN (hæc iterum nō sine causa assumitur inferiùs aperiēda) FM, eadē quā priores RQ, KN distantia quæ rectam AD secant in R, K, F. rectam EB in Q, N, M. Latus rectum AB in Z, I, H. Parabolas ASD, ELB, in O, S, G; & T, L, P. Dico corpus ortum ex ductu figuræ mixtæ OZIS, in figuram mixtam ZTLI notam habere rationem ad corpus ortum ex ductu figuræ mixtæ SIHG in mixtam figuram ILPH. Dico secundò corpus ortum ex Trapezio RZIK ducto in Trapezium ZQNI; ad corpus ortum ex Trapezio KIH F ducto in Trapezium INMH notam etiam habere rationem.

Preparatio.

Describatur Parabola AVLB: cuius ordinatim Applicata AB ad axem sit eiusdem etiam latus rectum: hanc porro Parabolam ductæ parallelæ secant in V, L, X.

X

Demon

Demonstratio.

Fig. 22. Corpus ortum ex figura mixta ZVLI in se ducta, æquale est corpori orto ex figura mixta OZIS ducta in mixtam figuram ZTLI per Prop. 33. Huius. Item corpus ortum ex figura mixta ILXH in se, æquale est corpori orto ex figura mixta SIHG in figuram mixtam ILPH ducta. Sed corpora ex figuris mixtis ZVLI, ILPH in se ductis nota sunt per Prop. 34. Huius tam in continua, quam in discreta quantitate, atque adeo eorum inter se ratio. Ergo & ratio corporum ortorum ex mixtis illis figuris in mixtas figuras ductis, nota erit. Quod primo loco ostendi debebat.

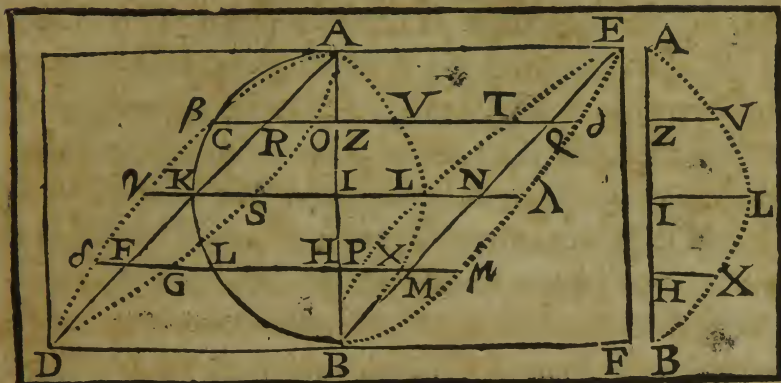
Deinde Prop. 39. notum factum est. Tum Geometricè tum Arithmeticè, corpus ortum ex Trapezio RZIK ducto in Trapezium ZQNI; & ortum ex Trapezio KIH F ducto in Trapezium INMH. Ergo nota etiam facta est ratio; quæ inter corpora illa intercedit. Tota ergo Propositio vera est.

R R O P. XLI. THEOR.

Isdem in eadem figura positis describantur duæ Parabolæ prioribus æquales: quarum vertices sint A & B: axis AB. quas lineæ Parabolæ superiori propositione designatæ (quas hic æquali spatio inter se distare suppono) si longius producantur, secant in β, Γ, Δ ; & in Θ, Λ, μ . Dico corpus ortum ex figura mixta $\beta Z \Gamma I$ ducta in figuram mixtam $Z \Theta \Lambda I$; notam habere rationem

tionem ad corpus ortum ex figura mixta
 $\Gamma I H \Delta$ ducta in figuram mixtam $I \Delta \mu H$.

Figura Vigesima secunda.



Demonstratio.

Hæc propositio ipsissima est 44. lib. 10. à Geometra
 ex suis ipsius principiis probata: ex cuius veritate; si *Fig. 22.*
 euidenter constare potest; tota stabilitur circuli Qua-
 drandi ratio; aut tota corrumpitur: si quid vitij pati depre-
 hendatur. Quapropter propositionis demonstratio-
 nem eisdem Authoris verbis, quæ deinceps sigillatim
 perpendere necesse futurum est, huc afferam; mutatis
 tantum schematis characteribus. Igitur postquam
 confirmauero ex Prop. 40. præcedente huius. Rationem
 corporis orti ex ductu plani mixti $OZIS$ in planum mix-
 tum $ZTLI$; ad corpus ex plano mixto $SIHG$ ducto in
 planum mixtum $ILPH$, esse notam (hæc, prima ra-
 tio, dicenda est, ut verbis parcatur) item notam esse
 rationem corporis geniti ex Trapezio $RZIK$ ducto
 in trapezium $INMH$. (Quæ ratio secunda vocabi-
 tur.) Tum cum Geometra cōcludam notam esse ratio-

X 2

nem

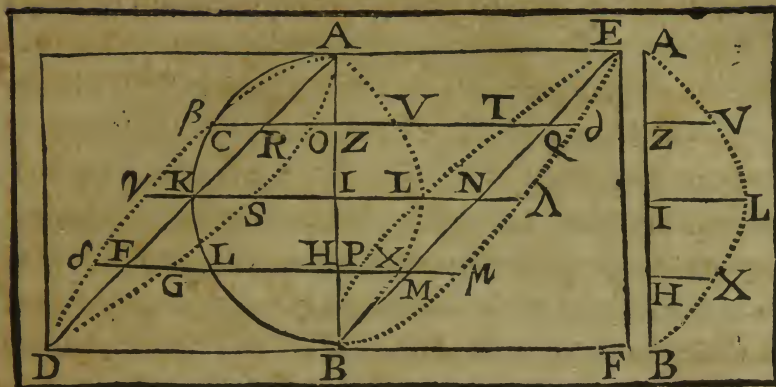
nem tertiam corporis orti ex mixta figura $\beta \gamma \Gamma$ ducta in mixtam figuram $Z \Theta \Delta I$, ad corpus ortum ex mixta figura $\Gamma I H \Delta$ ducta in mixtam figuram $I \Lambda M H$, hæc eius verba sunt exceptis characteribus.

Fig. 22 *Demonstratum est, inquit Prop. 40. lib. 10. rationem corporis orti ex ductu $O Z I S$ in $Z T L I$, ad corpus ortum ex ductu plani $S I H G$ in $I L P H$; toties continere rationem corporis orti ex ductu plani $R Z I K$ in $Z \mathcal{Q} N I$, ad corpus ex ductu $K I H F$ in $I N M H$: quoties hæc ratio continet rationem corporis orti ex ductu $\beta \gamma \Gamma$ in $Z \Theta \Delta I$, ad corpus ortum ex ductu plani $\Gamma I H \Delta$ in $I \Lambda M H$. Igitur cum nota sint prima & secunda ratio: notum quoque est: quoties prima secundam contineat: ac propterea notum quoque est quoties secunda contineat tertiam. Itaque cum secunda ratio scilicet corporis orti ex ductu plani $R Z I K$ in $Z \mathcal{Q} N I$ ad corpus ortum ex ductu plani $K I H F$ in $I N M H$ nota sit: etiam nota erit Ratio corporis: quod oritur ex ductu superficiæ $\beta \gamma \Gamma$ in $Z \Theta \Delta I$ ad corpus ortum ex ductu superficiæ $\Gamma I H \Delta$ in $I \Lambda M H$. Quod erat demonstrandum. Atque hæcenus Geometra. De cuius propositione plura recurrent inferius dicenda: ad quæ prius quam venio: Alteram eius propositionem eius verbis addo quæ proxime ad Quadraturam influit. Quæ ita habet exceptis characteribus Alphabeticis.*

P R O P. XLII. T H E O R.

Ponantur super $A B$ duo Quadrata $A B D$, $B A E$; quibus inscriptæ sunt duæ semiparabolæ $A \beta \Gamma \Delta D$, $\beta M \Lambda \Theta E$ situ subalterno circa communem

Figura Vigesima secunda.



munem axem A B. Et super A B diametro, semicirculus describatur A K B. Dico corpus quod producit Parabola A F D ducta in Parabolam B Λ E æquari semicylindro, cuius basis est semicirculus A K B. Altitudo A B.

Demonstrationem huius Propositionis dedit libro Fig. 22. de ductibus Prop. 143. Hic verò nouam aliam exponit. Prop. 51. ad cuius calcem corollarium affert ex eadem propositione profectum: nimirum segmenta subalterna Parabolica eisdem parallelis intercepta β Z I Γ , Z Θ Λ I ducta in se inuicem, æquale solidum producere segmento Cylindrico, cuius altitudo est A B; basis verò est segmentum circulare eisdem lineis parallelis interceptum, quale est superficies mixta CZIKC.

X 3

PROP.

lares Z, I, H secantes Parabolas in B, Γ, Δ, & Θ, Λ, M semicirculum verò in C, K, L. Dico superficiem mixtam OZIK, ad mixtam superficiem KIH L, notam habere rationem.

Demonstratio.

Hæc est Geometræ Propositio 52. in hoc particulari *Fig. 23.*
casu clarissima: sunt enim hæ duæ superficies æqua- *Fig. 22.*
les. Sed hanc vniuersaliter sic demonstrat. Demonstratum est paulò ante, corpori ex ductu plani ZβΓI in ZΘΛI. Æqualem esse partem Cylindri super basi CZIK in altitudine AB. Similiter corpori ex ductu plani ΓIHΔ in IΛMH æquari Cylindri partem cuius basis est KIH L & altitudo AB. Sed demonstratum est Prop. 41. Huius. Corpora quæ illis Cylindricis partibus æquantur, notam habere rationem. Igitur etiam partes Cylindricæ inter se notam habent rationem. Sed partes Cylindricæ, cum altitudine non discrepent, eandem inter se rationem habent quam bases CZIK; KIH L. Ergo harum etiam nota est ratio. Quod fuit probandum.

PROP. XLIV. PROBL.

Oporteat tandem proportionem circuli ad figuram rectilineam exhibere.

Ira tandem Geometra Prop. 53. lib. 10. Celeberrimi *Fig. 23.*
Problematis solutionem proponit & explicat; ad quam
assequendam conatus omnes illos egregios toto hoc
opere

ius diameter AB in quatuor æquales partes diuidatur in Z, I, H: per quæ puncta ducantur normales, ad AB circulo occurrentes in O, K, L; & ponantur IO, IL, OL. his positis; constat primò arcum OK tertiam esse partem Quadrantis AOK. Diuisa enim est circuli semidiameter bifariam in Z. constat autem semidiametri semissem ZI, sinum esse arcus OK Grad. 30. Constat secundò aream quadrantis AIK minorem esse areâ mixti quadrilateri OK, LHZ. Nam sector AIO æqualis est sectori OIL; eo quod vterque sit duæ tertix partes quadrantis circuli. Ablatis ergo æqualibus illis sectoribus: remanet ex Quadrante sector OIK; ex quadrilatero verò supersunt duo triangula OZI, LHI siue rectangulum OI duobus illis triangulis æquale. Dematur adhuc tam ex sectore OIK, quam ex rectangulo OI, triangulum OCI commune: remanebit ex sectore OIK semi-segmentum OKC: & ex rectangulo OI, triangulum OZI siue ei æquale triangulum OCI. Sed triangulum OCI maius est semifegmento OKC, vt statim probabo; ergo etiam tota figura mixta quadrilatera OKLHZ maior est toto circuli Quadrante AID.

Quod autem triangulum OCI maius sit segmen-
to OKC, constat si ducatur linea OG perpendicularis ad OI; quæ circulum tanget in O. Erit enim in triangulo rectangulo IOG demissa OC ad basim IG perpendicularis, media proportionalis inter CI & CG. Sed CI subtendens angulum O trianguli OCI maiorem, maior erit latere OC subtendente angulum I

Y

mino

erit: scilicet duo triangula OZI , & LHI siue rectangulum OI . Ergo etiam nota erit ratio Quadrantis AIK ad hunc excessum rectilineum, hoc est rectangulum OI . Ergo tandem nota erit ratio totius circuli, cuius AIK Quadrans est ad rectangulum OI rectilineum. Præstitum ergo est ex mente Authoris, quod erat requisitum. Atque hæc est prima à Geometra nostro allata circuli Quadratura; quam acuratiùs perpendendam suscepi. Nunc ergo totam numerorum rationibus subiiciamus, Quod ex præmissis superiùs, haud erit factu difficile.

Quia igitur ex eo vno capite, vt patuit, tota pendet *Fig. 23.* hæc circuli Quadratura, vt nota fiat ratio, Quadrantis circuli AIK ad mixtum Quadrilaterum $OKLHZ$. Hæc autem ostensa sit Prop. 43. eadem cum ratione, quam corpus ortum ex ductu segmenti Parabolici $A\beta\Gamma IA$ in segmentum Parabolicum $AI\Lambda\Theta EA$ habet ad corpus ortum ex ductu figuræ mixtæ $Z\beta\Gamma\Delta HZ$ in figuram mixtam $Z\Theta\Lambda\mu HZ$: æquali enim spatio binæ lineæ parallelæ AE , $\Gamma\Lambda$ & binæ $\beta\Theta$, $\Delta\mu$ dissitæ sunt ex constructione, cum æquales sint positæ AI , ZH . Horum denique corporum ratio nota sit, si prius innotescat habitudo, quam habent corpora, de quibus Prop. 40. quam hic statim repetam. Ab iis initium sumere necesse est numericas rationes; quas circa exemplum singulare iuxta methodum in superioribus propositionibus allatam nunc inire propositum mihi est. Quod vt maiori cum ordine; vnde pendet, vt plurimum, rerum tractandarum

Y 2 euidencia,

euidencia, instituat; placet seriem propositionum hactenus promotam obseruare: licet de singulari casu nunc agere videat: & potius in praxim reducere, quæ vniuersaliter tradita sunt, quam nouum quippiam hic adducere. Sit ergo.

P R O P. XLV. P R O B L.

Fig. 22. Ex figura Propositionis 42. exponatur seorsim Parabola $AVLXB$: cuius Applicata ad axem sit AB æqualis lateri recto Parabolæ. Sit autem AB diuisa in quatuor partes in Z, I, H , per quæ agantur parallelæ ad AB normales, quæ secant Parabolam in V, L, X .

Figura Vigesima secunda.



Oporteat ergo numeris exprimere solidam quantitatem tam corporis geniti ex ductu semisegmenti parabolici $AVLI$ in se; quam corporis, quod producit mixta Quadrilatera figura $ZVLXH$ in se ducta: cuius basis ZH , æqualis est basi AI , & vtraque semissis totius AB .

Solutio

Solutio.

Ad priorem partem quod attinet, qua iubetur re- Fig. 22.
 periri solidum, quod semifegmentum AVL I in se du-
 ctum producit. Iam solutum est Problemate Prop. 36.
 Huius. Ibi enim inuentum est in numeris solidum
 æquale vngulæ segmenti Parabolici A L B. Sed hæc vn-
 gula integri segmenti A L B, est æqualis corpori, quod
 producit semifegmentum A L I in se ductum. Constat
 enim corpus huiusmodi, duabus semi-ungulis Parabo-
 licis, vt patet ex doctrina de ductibus à me superius,
 quantum satis explicata; quæ sunt æquales duabus se-
 mi-ungulis; in quas vngula orta ex segmento Parabo-
 lico A L B diuidi potest, si per medium in I L secetur
 eius longitudo. Numerus ergo citata propositione
 repertus est. $\frac{2}{15}$. posita ordinatim Applicata A B par-
 tium 2, vel A I partis vnus: quem numerum diligen-
 ter annotari oportere ibidem monui.

Secunda verò pars problematis soluta etiam habe-
 tur Prop. 38. In ea enim propositione de industria exē-
 plum attuli: quod huic propositioni inferuitu-
 rum prænoscerebam, licet illa vniuersaliter loquatur. In
 ea ergo propositione corpus exhibui in numeris, quod
 figura mixta Z V L I in se ducta producit; posita A I
 partis vnus, & A B partium duarum: vt hic supponi-
 tur: Sed corpus ortum ex figura mixta hic proposita
 Z V L X H in se ducta; duplum est corporis geniti ex
 dimidio eiusdem figuræ (quod dimidium, est figura
 Z V L I) in se ducto. Si igitur corpus illic inuentum $\frac{314}{38,0}$

Y 3

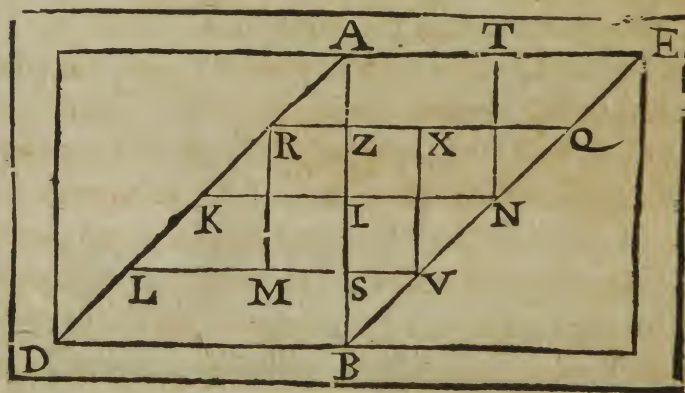
dupli

duplicetur, vt fiat $\frac{2}{15}$, exprimet hic numerus soliditatē corporis geniti ex mixta figura ZVXLXH in se ducta; vt fieri debuit. Duo ergo numeri hac Prop. inuenti hic seponantur, vnde repeti possint suo tempore. Prior est $\frac{2}{15}$ posterior $\frac{3}{10}$.

PROP. XLVI. PROBL.

Fig. 24. Ex eadem Propositionis 42. expediatur figura parallelogramma siue Rhomboides. AEBD: cuius diuider A B in quatuor partes æquales diuidatur in punctis Z, I, S: per quæ ducantur lineæ ad A B perpendiculares, secantes latus A D in R, K, L, & E B latus in Q, N, V.

Figura Vigesimaquarta.



Oporteat ergo numeris exprimere solidam
Fig. 24. quantitatem tam corporis geniti ex ductu
trianguli AIK in Trapezium AINE: quam
corporis geniti ex ductu Trapezij RZSL in
Trapezium ZSVQ. Posita tota A B , par-
tium

tium 2. vel eius semisse AI, aut ZS, i. vt prius.

Solutio.

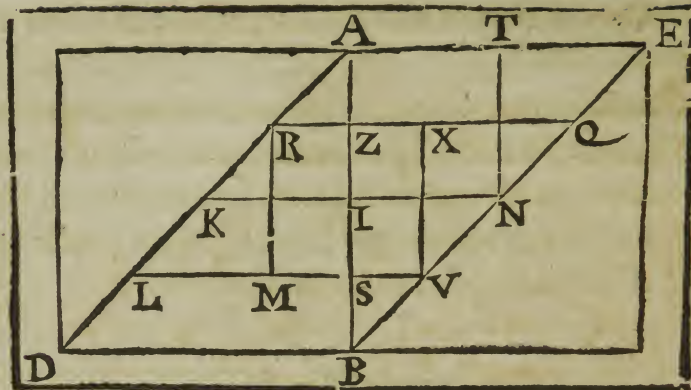
A punctis R, N, V; ducantur lineæ ad AB, paral- Fig. 24.
lelæ RM, NT, VX. Erit AE diuisa in T in duas
partes æquales: eo quod AT æqualis sit oppositæ li-
neæ IN in rectangulo AN: sit autem ipsa IN, semif-
sis lineæ KN, id est AE. Similiter RQ. in X; &
LV in M, bifariam diuiduntur. Rursus RX iterum
bifariam diuiditur in Z, & MV in S, nam in triangu-
lo rectangulo AZR, duo anguli A & R sunt semire-
cti, atque adeo æquales. Ergo & latera ZA, ZR per
6. lib. 1. sunt æqualia; sed ex hypothesi ZA est semissis
lineæ AI, quæ æqualis est lineæ RX. Ergo & ZR
semissis est lineæ RX. Eodem iure SV, SM æquales
probabuntur; & vtraque erit vt patet; quarta pars linea-
rum RQ, LV. Denique triangu-
la AIK, ETN, RML,
QXV sunt æqualia propter æqualia eorum singula
latera. Quibus declaratis, quæ ad vtramque partem
propositionis pertinent. Nunc priorem aggrediamur.

Prior ergo pars qua inquiritur corpus ex triangulo Fig. 24.
AIK in Trapezium AINE genitum soluetur, si pri-
mo triangulum AIK ducatur in triangulum ETN
subalterne positum: ex eo verò ductu generatur cor-
pus; quod per Prop. 20. Corol. 2. Huius. est sexta pars
parallelepipedum cuius basis est rectangulum sub lateri-
bus IK, TE triangulorum: & altitudo est latus AI vel
TN commune, vnde ductus incipit: Quo fit in hoc
casu,

fiue $\frac{1}{4}$. Quod priore huius Propositionis parte quæ-
ritur. Quod scilicet oritur ex triangulo AIK in Tra-
pezium AINE.

Posterior propositionis pars absoluitur ducendo Fig 24
singulas Trapezij R Z S L partes, nimirum triangu-
lum R M L, & rectangulum R S; in duas singulas Tra-
pezij Z Q V S; partes: quæ sunt rectangulum Z V, &
triangulum X V Q. vt Prop. 39. declaratum est. Primò
ergo triangulum R M L ductum in triangulum X V Q
corpus solidum producit idem, quod iam ante produ-
ctum fuit in priori parte ex ductu trianguli A I K in
triangulum T N E nempe $\frac{1}{4}$. Idem verò triangulum
R M L ductum in rectangulum Z V generat prisma
triangulare, æquale parallelepipedo: cuius basis est
rectangulum Z V; & altitudo est semissis lateris M L,
trianguli M R L. Sed semissis lateris M L quod æqua-
le est ostensum lineæ Z S, est Z I, vel I S quæ est $\frac{1}{4}$:
cum tota Z S sit ex hypothesi 1. Si igitur Z I $\frac{1}{4}$ mul-
tiplicetur in rectangulum Z V (cuius area habetur du-
cta Z X $\frac{1}{4}$ in Z S, 1, & est $\frac{1}{4}$) fiet parallelepipedum
 $\frac{1}{4}$, æquale prismati triangulari supradicto. Altera verò
pars eiusdem Trapezij R Z S L, nempe rectangulum
R S ductum in triangulum X Q V: idem solidum
 $\frac{1}{4}$ producere debet. Cum rectangulum R S æquale sit
rectangulo Z V. & triangulum X Q V triangulo R M L.
Denique duci debet rectangulum R S in rectangulum
Z V; & produceretur parallelepipedum, cuius ba-
sis est rectangulum Z V. $\frac{1}{4}$, & altitudo R Z $\frac{1}{4}$.

Z Ergo



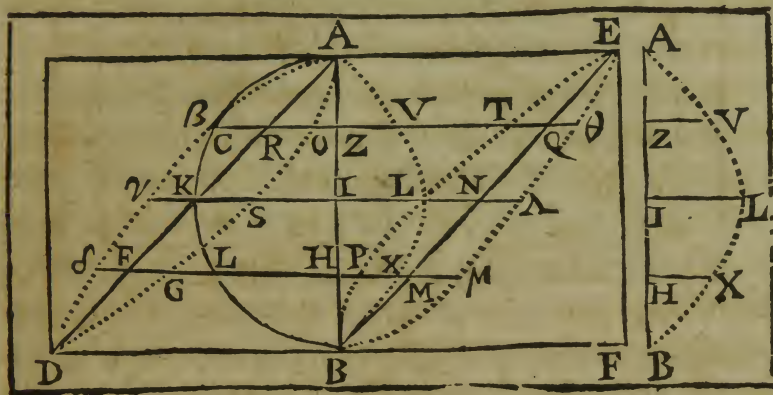
Ergo hæc altitudo $\frac{1}{2}$ ducta in basim $\frac{1}{2}$ producit
 parallelepipedum $\frac{1}{4}$. Ita vt tria æqualia solida gene-
 rentur, nempe ex ductu trianguli R M L in rectangu-
 lum ZV; ex ductu rectanguli R S in triangulum XQV
 & denique ex ductu rectanguli R S in rectangulum
 ZV; semper enim generatur solidum $\frac{1}{4}$. Tria ergo
 illa solida siue corpora simul addita efficient solidum
 $\frac{3}{4}$: cui adhuc addi debet solidum factum ex triangulo
 RML ducto in triangulum subalterne positum VXQ.
 Quod solidum est inuentum $\frac{1}{6}$. Ergo facta additio-
 ne habebitur solidum $\frac{5}{12}$ productum ex Trapezio
 RZSL in Trapezium ZQVS. Quod quærebat. Hic
 ergo numerus $\frac{17}{12}$ post assumendus etiam annotetur.

P R O P. XLVII. PROBL.

Fig. 22. In figura Propositionis 42. oporteat Ratio-
 nem determinare in numeris, quam habet cor-
 pus ortum ex superficie mixta AβΓI ducta in
 mixtam superficiem A I λ ⊙ E subalterne posi-
 ram

tam, ad corpus ortum ex mixta superficie
 $Z\beta\Gamma\Delta H$ ducta in mixtam superficiem $ZH\mu\Lambda\Theta$.

Figura Vigesima secunda.



EXPOSITIO.

Cum ex Prop. 41. superiore, quæ apud Geome- Fig. 22.
 tram est 44. lib. 10. constet iuxta eius Principia ratio-
 nem corporis orti ex mixta figura $AVLI$ in se ductâ,
 ad corpus ortum ex mixta figura $ZVLXH$ ducta in
 se; toties continere rationem corporis orti ex triangulo
 AIK ducto in Trapezium $AINE$ ad corpus ortum
 ex Trapezio $ZHFR$ ducto in Trapezium $ZHMQ$:
 quoties hæc ipsa ratio continet rationem corporis orti
 ex superficie mixta $A\beta\Gamma I$ ducta in mixtam superfi-
 ciem $AI\Lambda\Theta E$; ad corpus ortum ex mixta superficie
 $Z\beta\Gamma\Delta H$ ducta in mixtam superficiem $Z\Theta\Lambda\mu H$.
 Sint autem termini primæ & secundæ rationis noti per
 Prop. 45. & 46. atque adeo notæ ipsæ rationes prima
 & secunda: notum quoque erit, inquit Author citata
 Prop. 44. lib. 10. quoties prima contineat secundam:

$Z \quad 2 \quad$ atque

que adeo notum etiam erit quoties secunda contineat tertiam, ac proinde nota etiam euadet ipsa ratio tertia.

Hic non parum me hærere contigit, mi Lector, nec potui non dolere tarditatem meam & nimix sanè breuitatis non accusare doctissimum Geometram, qui caput, vnde tota eius hæc Quadratura absolui debet, tam leuiter perstrinxerit. Pronunciatu facile est, nec primâ fronte factu difficile, ex duabus notis rationibus tertiam efficere notam. Censeret non nemo eam esse Authoris mentem, vt velit duabus notis rationibus tertiam inueniri proportionalem, atque ita notam fieri nec ab eius verbis abhorret hæc sententia. Ait enim, *cum nota sint prima & secunda ratio; notum quoque est quoties prima contineat secundam, ac propterea notum quoque quoties secunda contineat tertiam, itaque cum secunda nota sit: nota etiam erit.* quid magis huic sententiæ concinere potest? Quod si nihilominus dubites an per hæc verba. *notum est quoties prima ratio contineat secundam; ergo & notum quoties secunda contineat tertiam,* intelligat eas esse proportionales velitque primam ita se habere ad secundam vt hæc se habet ad tertiam: dubium tollet Propositio 125. libri de Proport. vbi docens modum diuidendi rationem per aliam, ait. *Oporteat rationem per aliam partiri, siue ostendere quoties vna alteram contineat.* Quæ verba aliud non sonant quam, ostendere quam habitudinem habeat vna ratio ad alteram: & in Corollario eiusdem Propositionis sic loquitur. *Hinc manifestum est diuisionem vnius rationis per alteram*

ram coincidere cum assignatione illius rationis quam continent inter se due rationes inuicem diuidende. Ex quibus liquido constat Authorem nihil aliud velle significare hoc loquendi modo, *vna ratio alteram continet*, vel, *toties continet*, quam vnā rationem ita, vel ita se habere ad alteram. Denique cum nullus alius Geometris notus sit modus tertiam quantitatem ignotam inuestigandi ex duabus notis quantitibus proportionalibus; quam tertiam proportionalem duabus notis adiungendo: Si alio aliquo ipsi soli comperto modo tertiam illam rationem ignotam ex duabus notis & quidem talem quæ non foret illis tertia proportionalis, inueniri debere intelligeret: nunquid illum, etiam cum absoluto Quadraturæ, quam stabilire & tradere conatur, damno reticuisse? Hæc momentum grauissimum habere mihi videbantur ad suadendum factum fore satis allatæ Propositioni: si duabus datis rationibus primæ & secundæ tertiam proportionalem assignassem. Verum non leuioris ponderis rationes occurrebant; quibus adducebar vt crederem aliud aliquid Authorem exigere ad tertiam illam rationem determinandam ex duabus datis; quam inuestigationem rationis tertiæ duabus datis proportionalis. Nam

Primò quidem nullibi cernere est Geometram per totam eius ratiocinationem, quæ ab initio lib. 10. ad Propositionem 44. continetur, vel proposuisse vel probasse has tres rationes solidorum (quæ initio huius expositionis appellauī) Proportionales esse, nec eius

Z 3. Propor

Proportionis mentionem ullam fecisse ; sed semper aliam quandam rationum mutuam continentiam attendisse & significare voluisse. Nullo ergo modo nunc, nullo assertionis prius iacto fundamento, censendus est asserere tertiam illam rationem ignotam, debere inuestigari ex duabus notis rationibus iuxta solemnem in Geometricis modum, quo ignotæ quantitates ex datarum rationibus notis colliguntur.

Secundò non obscurè videtur colligi ex toto eius discursu, qui hac Prop. 44. tandem concluditur ; ita debere accipi hanc rationum continentiam, ut prima ratio secundam toties contineat per multiplicationem ; quoties secunda per multiplicationem continet tertiam : atque ita posse in hoc sensu tertiam illam ex duabus prioribus datis innotescere : qui sensus à priori diuersissimus est, ut Prop. 24. lib. 1. exposui, tertiamque illam rationem à priori longè diuersam, si in eo sensu quæratùr, oblaturus est.

In hac tanta difficultate, ex qua Quadraturæ huius fors tota pendet, è re maximè futurum censeo ad ipsius Authoris oracula adire ; & si fieri possit, ex eius ore genuinum sensum huius continentia rationum excipere. Hunc ego tribus omnino propositionibus capi arbitror : in quarum expositione elucet eruditi viri reuerendi Patris Alfonso de Sarasa, opera accurata eò pluris facienda ; quod ea ipsa, quæ in confirmatione Quadraturæ edidit ; ab ipsius Authoris ore excipisse potuit. Earum Propositionum prima est octaua lib. 10. secunda est 12. tertia verò 40.

In

In prima harum trium Propositionum, quam exponit P. de Sarala Cor. 7. in Confirmationibus Quadraturæ. ostenditur. Quod si rationis E ad F iam Antecedens E in duas partes A & B; quam Consequens F in duas C & D diuidatur: Rationem E ad F eandem esse cum Ratione A ad C; item A ad D, & B ad D. Nam ratio A ad C, & B ad C, propter eundem Consequentem C, sunt vt A & B simul ad C. hoc est, vt E ad C. Eodem modo, ratio A ad D & ratio B ad D erunt vt A & B simul, hoc

		E 20	
A 12			B 8
C 6			D 2
		F 8	

est E ad D: Et Inuertendo terminos. Rationes C ad A, & C ad B, erunt vt C ad E; similiter rationes D ad A & D ad B, erunt vt D ad E. Sed rationes C ad E & D ad E propter eundem Consequentem E sunt vt C & D simul, hoc est, F ad E. Ergo ita est F ad E vt C ad A & C ad B; & simul D ad A & D ad B. Vel contrà; ita est E ad F, vt A ad C, & A ad D; & vt B ad C & B ad D. Cum verò huiusmodi rationes colliguntur, satis patet non fieri additionem rationum: sed tantum quantitatum quæ ex parte rationes augment, ex parte minuunt: tunc scilicet cum inuariato Antecedente E adduntur duo Consequentes C & D vt fiat F: habet enim E ad F minorem rationem quam habeat ad C, quia iste Consequens C auctus est Accedente Consequente D dum inuariatus perseverat Antecedens F. Quod diligenter obseruandum monet Author & merito in scholio citatæ Prop. 8.

In

In altera Propositione, quæ est lib. 10. duodecima sic Author loquitur. Si sint quatuor ordines quinque proportionalium quantitatum $A B C D E$, &c. habentes ultimas quantitates E, K, P, V , æquales. Dico Rationem quantitatum $A F$ ad $L Q$ toties continere rationem quantitatum $C H$ ad $N S$; quoties ratio quantitatum $C H$ ad $N S$ continet rationem quantitatum $D I$ ad $O T$. hoc ita demonstrat. Ratio quan-

A 16	B 8	C 4	D 2	E 1
F 81	G 27	H 9	I 3	K 1
L 256	M 64	N 16	O 4	P 1
Q 625	R 125	S 25	T 5	V 1

titatum A & F simul, ad quantitates L, Q simul æquatur rationi, $A L, A Q, \& F L, F Q$. Similiter ratio quantitatum $C H$ ad $N S$ æquatur rationi $C N, C S; \& H N, H S$. Pariter etiam ratio quantitatum $D \& I$ simul ad $O T$ æquatur rationi $D O, D T; \& I O, I T$ per Propof. 8. proximè demonstratam. Ergo per eandem Prop. Quoties Rationes $A L, A Q; F L, F Q$ continent rationes $C N, C S; H N, H S$: & quoties hæ continent rationes $D O, D T : I O, I T$: toties continet etiam ratio $A F$ ad $L Q$, rationem $C H$ ad $N S$; & hæc ipsa rationem $D I$ ad $O T$.

Sed ratio $A L$ per 27. progr. continet per multiplicationem bis $C N$. Et ratio $C N$ per multiplicationem continet bis rationem $D O$. Ratio quoque $A Q$ continet bis rationem $C S$: & hæc bis rationem $D T$: atque
ita

ita dereliquis. Igitur quoties ratio quantitatum A F ad L Q continet rationem quantitatum C H ad N S : toties hæc ipsa ratio C H ad N S continet rationem quantitatum D I ad O T. Quod fuit demonstrandum. Hæc Geometra totidem omnino verbis : ex quibus non obscure colligimus, quo sensu velit in sequentibus vnam rationem toties vel toties aliam continere : quod ad solutionem Propositionis meæ ex eius mente instituendam necessarium est nosse.

Perpendamus paulò accuratius allatam ab eo rationationem. Ratio prima totalis (hic omiſſis characteribus rationes eodem ſervato ordine ſuperiore indico brevius) eadem eſt cum duabus partialibus rationibus primis per Prop. 8. paulò ante allatam. Idem dic de ſecunda & tertia totali ratione, & rationibus partialibus ſecundis & tertiis. Ergo (pergit Author) quoties primæ rationes partiales continent ſecundas ; & ſecundæ, tertias : toties etiam prima ratio totalis continebit ſecundam totalem, & hæc ſecunda tertiam totalem. Sed, ait idem, primæ partiales rationes continent bis per multiplicationem rationes partiales ſecundas ; & hæc partiales ſecundæ, bis tertias per multiplicationem : Ergo (quænam ex his præmiſſis inferatur alia conſequentia?) Ergo, inquam, prima ratio totalis continet bis per multiplicationem ſecundam : & ſecunda hæc bis per multiplicationem continet tertiam ; ſive prima eſt duplicata ſecundæ, & ſecunda eſt duplicata tertię. Licet verò Geometra conſequeretur tantùm in hæc verba : Ergo prima ratio totalis toties continet ſecundam ;

A 2

quoties

quoties secunda continet tertiam, nec ullam mentionem illius duplicationis fecerit; eam tamen duplicationem his rationibus conuenire nec debuit nec potuit non asserere. Præmissæ enim ab eo allatæ, eam vnam conclusionem inferunt, nec aliam inferre possunt. Quod ipsi adeò clarum visum est, ut inanem censuerit illius multiplicationis mentionem facere in conclusione; cum non aliter continentia rationum illarum in conclusione accipi possit, quam accipiatur in præmissis; & verò quid opus mentione multiplicationis in partialibus, si in totalibus nulla illius habeatur ratio. Vnde etiam fit; cum conclusio eadem sit ipsa Propositio probanda; ut Propositio in hoc etiam sensu multiplicationis accipienda sit, licet illius nulla mentio in ea fiat; dum tantum asserit rationem totalem primam, toties continere secundam; quoties ratio totalis secunda continet tertiam: cuius quidem multiplicationis mentionem si ipsi Propositioni, quando iuxta eam probanda erat, apposuisset: longe consultius fecisse; longe certe distinctius proposuisse videretur.

Tandem ergo euidenter assecutus videor sensum, & euidentius adhuc me assecutum constabit inferius; quo doctissimus Geometra Prop. 44. tertiam rationem inquit solidorum duorum ex notis duabus rationibus aliorum quatuor solidorum: quòve ego sensu eandem tertiam rationem in numeris exhibere nunc debeam iuxta Propositionem à me adductam superius. An autem vera sit vel falsa hæc Authoris Propositio 12. non est huius loci expendere: iuris est illa quæstio:
factum

factum probatum est, ex quo solutionem Problema-
tis mei instituire debeo. Erit cum Propositio illa per-
pendetur.

SOLVTIO PROP. XLVII.

Quærimus ergo Rationem quam habet corpus or- Fig. 22.
tum ex superficie mixta $A\beta\Gamma I$ ducta in mixtam su-
perficiem $AI\lambda\Theta E$; ad corpus ortum ex superficie
mixta $Z\beta\Delta H$ ducta in mixtam superficiem $ZH\mu\Theta$.
Eam autem quærimus ex data prima ratione, quam

Figura Vigesima secunda.


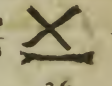


habet corpus ortum ex plano $AVLI$ in se ducto, ad
corpus ortum ex plano $ZVXH$: & ex secunda Ra-
tione quæ intercedit inter corpus ortum ex triangulo
 AIK ducto in Trapezium $AINE$, & corpus ortum
ex Trapezio $ZHFR$ ducto in Trapezium $ZHM\mu$,
quæ item data est. Inuenta autem fuerit tertia illa ratio
si duabus notis rationibus primæ & secundæ, ratio ad-
iungatur tertia, quæ huiusmodi sit, vt prima bis per
multiplicationem secundam contineat: secunda verò

Aa 2 etiam

etiam bis per multiplicationem contineat illam tertiam vt fusè paulo ante exposui.

Cum igitur primæ Rationis termini Prop. 43. inuenti sint hi $\frac{2}{15}$ & $\frac{331}{1920}$ secundæ verò Rationis termini Prop. 46. definiti fuerint huiusmodi $\frac{2}{1}$ & $\frac{11}{11}$. Reducamus primo loco terminos illos omnes, qui fracti sunt, ad numeros integros, futuris operationibus aptiores. Reductionis formulam adscribo: vt cuique pateat vnde ortum habeant numeri, quibus vtendum erit. Omissis ergo fractorum denominatoribus, solis

3840	4965	24	33
$\frac{2}{15}$	$\frac{331}{1920}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{11}{11}$
			
28800		36	

numeratoribus vtetur itavt primæ rationis termini sint 3840 & 4965. Secundæ verò sint 24 & 33. Et reducis etiam numeris ad minimos eandem rationem habentes erunt primæ quidem rationis termini 256 Antecedens & 331 Consequens. Secundæ verò Antecedens 8, & 11 Consequens.

Nunc demum vtraque hæc Ratio ad eundem Consequentem reducatur per Prop. 9. lib. 1. vt hoc in schemate exprimitur. Erit primæ rationis Antecedēs A 2816 & Consequens C 3641. Rationis vero secundæ Antecedens est B 2648, & Cōsequens iterū C 3641. Quia verò per Prop. 7. lib. 1. Rationes, quarū idem est Cōsequens, eandem habent proportionem, quam earundem Antecedentes; vt reperiatur tertia illa ratio, quam inuestigamus;

stigamus, ei iam attributo eodem cum reliquis Con-

A 2816	B 2648
256	8
331	11
C 3641	

sequente C 3641 congruentem Antecedentem inquiremus hoc modo.

Inter duos Antecedentes A 2816, & B 2648 datarum rationum primæ

& secundæ reperiatur medius proportionalis numerus D 2730 nonnihil minor verò (maior verò foret 2731, vterlibet adhibeatur, nihil ad institutum consequetur incommodi.) Deinde duobus numeris D & B tertius reperiatur proportionalis F 2568 (qui erit paulò maior

A 2816	D 2730	B 2648	E 2607	F 2568
--------	--------	--------	--------	--------

verò, sed nihil interest) denique inter B & F medius proportionalis reperiatur E 2607 minor verò, quod sufficit. Dico hunc numerum E eum esse qui quæritur, eum scilicet; cui velut Antecedenti si adiungatur Consequens C 3641, tertiam rationem quæsitam exhibebit: cuius, ratio secunda B ad C est duplicata; quemadmodum rationis B ad C secundæ est duplicata ratio prima A ad C.

Demonstratio.

A 2816.	D 2730.	B 2648.	E 2607.	F 2568.
C 3641.	C 3641.	C 3641.	C 3641.	C 3641.

Quia igitur ex constructione tres Antecedentes A, D, B sunt continue proportionales. Ratio A ad B

A a 3 duplicata

duplicata erit rationis D ad B. Sed vt D ad B, ita est ex constructione B ad F. Ergo ratio A ad B est duplicata rationis B ad F. Sed quia ex eadem constructione tres B, E, F sunt etiam continuè proportionales, erit etiam ratio B ad F duplicata rationis E ad F, siue B ad E. Quare cum rationes A, C, B C, E C, quarum idem est Consequens C, ita se habeant per 7. lib. 1. vt se habent Antecedentes A, B, E: erit prima ratio A C duplicata rationis B C secundæ; & secunda B C duplicata tertiæ E C. Duabus igitur datis rationibus primâ A C, & secundâ B C, tertiam inuenimus E C, quam toties contineat per multiplicationem ratio secunda B C iuxta mentem Authoris: quoties per multiplicationem ipsam B C secundam continet prima ratio A C quod querebatur.

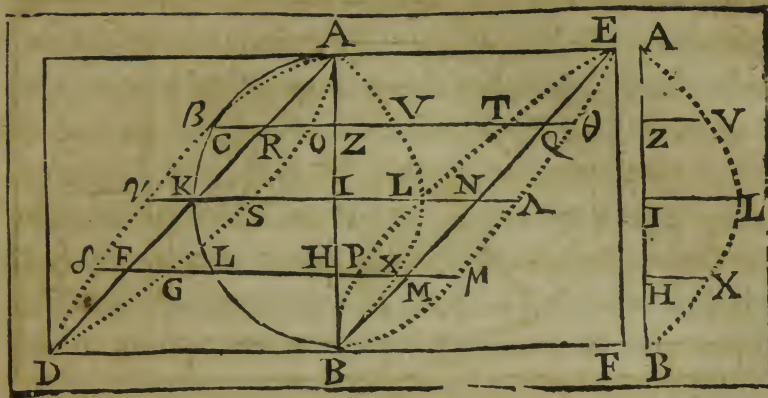
P R O P. XLVIII. THEOR.

Non videtur absoluta Circuli Quadratura.

E X P O S I T I O.

Fig. 22. Vt huius sententiæ æquitas euidentiùs constet: iuerit hic obiter recolere quæ iam in superioribus aliquoties proposita sunt. Nimirum corpus ortum ex plano AVLI in se ducto, ad corpus ortum ex plano ZVLXH in se ducto, talem habere rationem; quæ bis per multiplicationem contineat rationem corporis orti ex triangulo AIK ducto in Trapezium AINE ad corpus ortum ex Trapezio ZHFR ducto in Trapezium ZHM Q: sicut hæc ipsa ratio bis per multiplicationem

Figura Vigesima secunda.



plicationem continet rationem corporis orti ex plano $A\beta\Gamma I$ ducto in planum $AI\Delta E$, ad corpus ortum ex plano $Z\beta\Delta H$ ducto in planum $ZH\mu\Theta$: id enim stabilitum est iuxta Authoris mentem Prop. 47. precedente. Rursus ostensum est Prop. 42. superiore. Corpus ortum ex plano $A\beta\Gamma I$ ducto in planum $AI\Delta E$ æquale esse cylindraceo, cuius basis est circuli Quadrans AIK : corpus verò ortum ex plano $ZH\Delta\beta$ ducto in planum $ZH\mu\Theta$, æquale esse cylindraceo; cuius basis est mixtum quadrilaterum $ZHLC$. altitudo verò vtriusque huius cylindracei est recta AB . quo fit vt duo illa Cylindracea eandem habeant inter se rationem, quam habent inter se circuli Quadrans AIK & planum mixtum $ZHLC$. Ita vt ratio tertia, Propositione precedente inuenta, ad cylindracea illa duo spectans eadem ipsa sit ratio inter circuli Quadrantem AIK & planum mixtum $ZHLC$. His declaratis.

Demon

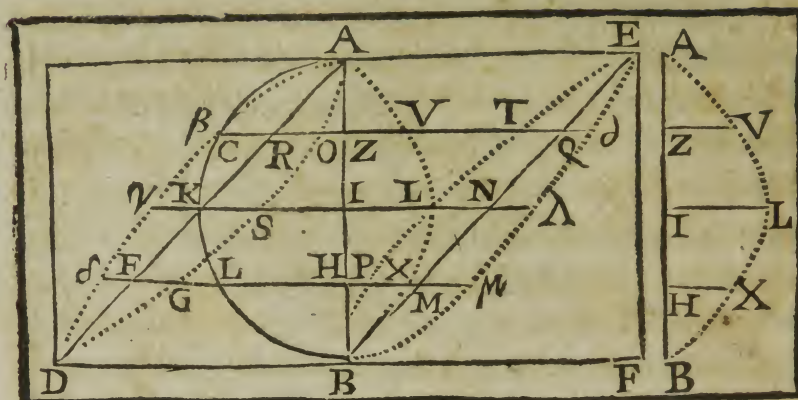
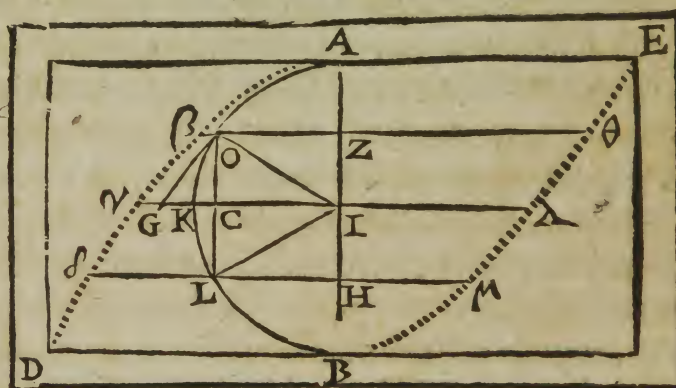


Figura Vigesima tertia.



Demonstratio.

Fig. 22. Cum termini tertiæ illius Rationis sint 2607 &
 & 23. 3641. ille Antecedenti, hic Consequens: ita erit Qua-
 drans circuli AIK ad Quadrilaterum mixtum ZL; vt
 2607 ad 3641. In altera figura ducantur à centro I cir-
 culi radij IL, IO ad puncta in quibus circulus seca-
 tur à parallelis Z β , H Δ , & iungatur OL. Erit sector
 IOKL æqualis sectori IAO, qui continet duas ter-
 tias

tias partes totius Quadrantis AIK Ergo & sector I O L
erit duæ tertiæ partes eiusdem Quadrantis. Præterea *Fig. 23.*
duo triangula I Z O, I H L erunt excessus Quadrila-
teri mixti Z L, supra duas tertias Quadrantis AIK:
sunt autem, vt patet, duo illa triangula simul æqualia
triangulo O I L. Iam sic ratiocinationem totam col-
ligo. Vt se habet Quadrans AIK ad duas sui tertias
partes ita numerus 2607 ad numerum 1738. duas ter-
tias sui partes continentem: deinde vt sector I O L siue
duæ tertiæ Quadrantis ad triangulum O I L siue exces-
sum quo mixtum quadrilaterum Z L superat secto-
rem I O L; ita erit numerus 1738 ad numerum 1903.
qui est excessus numeri 3641 supra numerum 1738 con-
tinentem duas tertias Antecedentis 2607. Sed numeus
1738 est longè minor quàm 1903 (hoc nimirum nu-
mero 165) ergo sector I O L longè minor est triangu-
lo O I L totum parte, quod est absurdum. Quod non
nisi ob defectum in Antecedentibus admissum, con-
tingere potest. Ergo non videtur absoluta circuli Qua-
dratura. Quod erat probandum.

Scholium.

*Reieci suprà, nec immeritò ob allatas rationes, sensum
illum; quo una ratio alteram continere dici potest simplici-
ter & absolutè; nec in eo accipi ab Authore hac in materia
vel potuisse vel debuisse. Ne quid tamen scrupuli resideat;
& firmitus stabiliatur, quod de sensu continentia rationum
per multiplicationem asserui: Propositionem præcedentem
etiam in sensu illo simplici & absoluto continentia rationum*

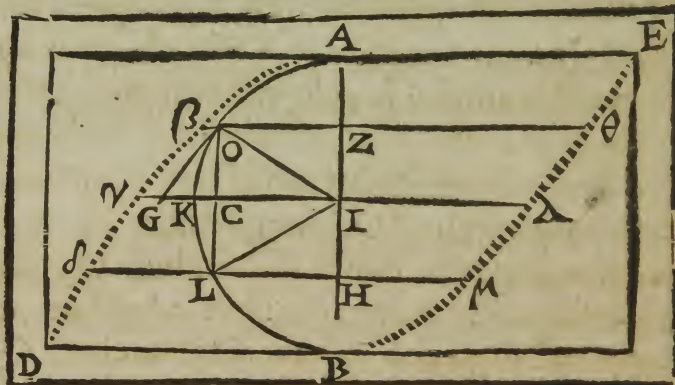
B b

luber

libet perpendere. Sic enim in omni sensu Cyclometra ratiocinatio nutare deprehendetur.

Resumantur igitur ex Propositione 47. Rationes duae his terminis expressae, 256 Antecedentis ad Consequentem 331, & 8 ad 11. Quibus ratio tertia proportionalis reperiatur in sensu absoluto per Prop. 26. lib. 1. cuiusmodi est ratio Antecedentis 331, ad Consequentem 484. his terminis assumptis, eandem ratiocinationem, eisdem verbis, eademque figurâ instituemus, in hunc modum.

Figura Vigesima tertia.



Ita se habet, ut vult Author, Quadrans circuli AIK, ad Quadrilaterum mixtum OZHLKO, ut 331 ad 484. Ergo ut Quadrans AIK ad duas sui tertias partes, hoc est, ad sectorem OIL: ita est numerus 331 ad numerum $220 \frac{2}{3}$ duas tertias partes illius continentem. Deinde ut sector IOL ad triangulum OIL: ita numerus $220 \frac{2}{3}$ ad numerum $263 \frac{1}{3}$; qui est excessus numeri 484 supra numerum $220 \frac{2}{3}$ continentem duas tertias Antecedentis 331. Sed numerus $220 \frac{2}{3}$ est longè minor numero $263 \frac{1}{3}$ (numero scilicet $42 \frac{2}{3}$) Ergo sector IOL minor est triangulo OIL.

OIL. Quod est absurdum. Quare sensus hic continentia
illarum rationum simplex & absolutus, nullo modo admit-
tendus est.

Scholium Secundum.

*Si propter rationes allatas minùs admittenda videatur
hæc Circuli Quadratura nec Quadratura Hyperbolæ, quam
ad calcem huius Libri Author exponit, admitti debet: ex
ijsdem scilicet fontibus deducitur; quos iterum euolvere haud
fuerit operæpretium.*

R R O P. XLIX. THEOR.

Totus huius Quadraturæ defectus ex vnica
Propositione duodecima lib. 10. profluxit.

Demonstratio.

Ne præstantissimo operi Geometrico, cui parturien-
do sæcula non viderentur sufficere, nota inuratur
Prop. 48. præcedente, quam par sit, grauior: dum plu-
res eius Propositiones earumque probationes in suspi-
cionem vocarentur: nouerit Lector à me Propositio-
nem vnica ex bis mille (vix enim pauciores hoc
opus complectitur, quas non minori attentione quam
voluptate perlegi) in dubiū vocari: ea est citata duode-
cima lib. 10. ex cuius periculo, trigesimanona & qua-
dragesima quæ ex ea pendent; in discrimen adducun-
tur: nec ab eo sese deinde tueri potest Propositio 44.
quæ tota quadragesimæ innititur.

Adduxi suprâ Prop. 47. in expositione, paragrapho.
In altera Propositione, &c. citatam illam Propositio-

B b 2 nem

nem 12. iuxta Authoris verba: & euentiffimè demon-
ftraui, ex eius fyllogyfmo, feruata fyllogifmi forma,
quam à viro doctiffimo feruari dubium non eft; eius
verborum fenfum; iuxta quem deinde Quadraturæ
folutio colligitur Prop. 44. Demonftraui fcilicet fi den-
tur quatuor ordines quinque quantitatum continue
proportionalium, quarum vltimæ fint æquales, vt hic
habentur iterum, velle Authorem, fi binæ duorum

A 16	B 8	C 4	D 2	E 1
F 81	G 27	H 9	I 3	K 1
L 256	M 64	N 16	O 4	P 1
Q 625	R 125	S 25	T 5	V 1

priorum ordinum & binæ respondentes posteriorum
iungantur; Rationem duarum primarum quantitatum
A & F fimul, ad duas fimul L & Q, continere bis per
multiplicationem, rationem tertiarum quantitatum
C & H fimul, ad duas quantitates N & S fimul. Et hanc
ipfam rationem C & H fimul, ad N & S fimul, conti-
nere etiam bis per multiplicationem rationem quanti-
tatum quartarum D & I fimul, ad quantitates O & T
fimul. Atque hæc erat facti quæftio tam clarè foluta,
quam quæ clariffimè folui poteft.

At verò fi de iure quæatur; fi, verane hæc Propofi-
tio an falfa fit, ex legibus Geometricis perpendatur:
negari fanè non poteft, quin in eam irreperit aliquid
falſitatis, quæ in decretoriam Quadraturæ ſolutionem
median

mediantibus Propositionibus 39. & 40, propagata man-
cam & imperfectam, vno verbo, nullam reddiderit.
Cuius probationem non aliunde longius petam quàm
à Quadruplici illo ordine superiore quantitarum pro-
portionalium. Iunge binos & binos terminos tam duo-
rum priorum ordinum, quam duorum posteriorum
& ita, vt hic habetur, compone: tum attende quam

A	B	C	D	E
97	35	13	5	2
F	G	H	I	K
L	M	N	O	P
881	189	41	9	2
Q	R	S	T	V

longe alia quàm duplicata sit ratio quantitarum A, F
simul; ad quantitates L, Q simul; rationis C, H simul,
ad N, S simul: quàm item alia quam duplicata sit hæc
ipsa ratio C H, ad N S; rationis D I ad O T. Nec mi-
rum, confunduntur enim rationes partialium termi-
norum per eorum additionem; eo quod ipsæ sint he-
terogeneæ, & diuersæ inter se speciei: ex quarum coa-
litione, tertium quid ignotum nasci necesse est, non
secus accum totum ad totum refertur, & ex totis ali-
quid demitur diuersæ rationis à ratione totius ad to-
tum; reliquum ad reliquum diuersam etiam rationem
habet à ratione tam totius ad totum, quàm ablati ad
ablatum; ita vt nulla sit inter has rationes partiales con-

B b 3 nexio;

nexio; nec vna quidquam cum alia commune retineat, unde dignosci alterutra vel vtraque possit mutatâ enim rationum essentiâ siue specie, mutari necesse est earum proprietates siue ad multiplicationem, siue ad aliâs earum mutuas relationes quascumque, pertinentes. Frustra pluribus ostendero hanc Propositionem ita intellectam (vt Authorem intellexisse probatum est) defectum aliquem pati, qui deinceps in Quadraturam Prop. 44. lib. 10. expositam redundet. Ita vt verissimè asserti possit iuxta hanc Propositionem meam 49. totum Quadraturæ defectum Prop. 48. obseruatum, ad Propositionem 12. lib. 10. tanquam ad eius fontem primum acceptum referri debere. Quod erat demonstrandum.

PROP. L. THEOR.

Neque si alio sensu accipiatur Propositio illa duodecima libri 10. à defectûs in Quadraturam derivati suspicione vendicabitur.

EXPOSITIO.

Quia citatæ illius Propositionis 12. lib. 10. veritas stare non potest; si in eum sensum accipiatur, in quem accipi debere suadet ipsius Authoris ratiocinatio ad eius probationem instituta, ne alioqui vir summus violatæ formæ syllogisticæ apertè dānetur, vt exposui superius: alium ei sensum tribuat non nemo; ex quo, si perpendatur dicta Propositio, à veritate non reperiatur aliena. Atque in eo exponendo enituit R. Patris Alfonsi à Sarasa studium in doctissimis confirmationibus

bus

bus huius Quadraturæ Coroll. 9. & 10. quæ habentur ad calcem operis totius.

Cum igitur Author Quadraturæ asserit Prop. 12. lib. 10. inquit citatus P. Alfonso, rationem quantitatum A, F ad L, Q toties continere rationem quantitatum CH ad NS quoties ratio quantitatum CH ad NS continet rationem quantitatum D, I ad OT. ita intelligendus est

A	B	C	D	E
F	G	H	I	K
L	M	N	O	P
Q	R	S	T	V

vt tantum velit; totam rationem quantitatum A, F, ad L, Q constitui ex rationibus sibi additis iuxta sensum Propositionis 8 (hanc exposui supra)

quæ rationes toties multiplicatæ sunt rationum earum, quæ sibi additæ iuxta sensum Prop. 8. constituunt totam rationem quantitatum C, H ad N, S; quoties rationes istæ constituent rationem C, H, ad N S sunt multiplicatæ rationum illarum, quæ iuxta sensum Prop. 8. sibi additæ constituunt totam rationem quantitatis D, I ad OT. Hæc ille, quibus nihil distinctius, nihil explicatius dici potest: eaque non semel sed iterum ac tertio inculcat citatis locis. Vt verò causam afferat (affert autem gravissimam) cur totalis ratio AF ad L Q toties multiplicata non sit rationis totalis CH ad NS; quoties hæc multiplicata est rationis totalis D, I ad OT, hoc est, cur ratio A, F ad L, Q duplicata non sit rationis CH ad NS, & ratio CH ad NS non sit itidem duplicata rationis DI ad OT. Licet partialis ratio A ad L duplicata sit rationis partialis C ad N: & partialis C ad N duplicata, rationis

rationis partialis D ad O; & eodem modo se habeant
 partiales reliquæ rationes A ad Q, C ad S & D ad T. Itē
 F ad L, H ad N, I ad O. Item F ad Q, H ad S, I ad T.
 Hæc habet Coroll. 10. Ratio illius discriminis inter tota-
 les rationes, & singulas partiales ortum habet ex eo, quod
 rationes singule partiales non coalescunt per multiplicatio-
 nem sed per veram additionem & subtractionem simul: seu
 non coalescunt ut multiplicata sunt singula singularum; sed
 ut sunt simplices rationes. Imò ut pressius loquar, inquit,
 nulla operatione hic opus est: nam citra ullam additionem
 extrinsecam, coaluerunt iam rationes C ad N, H ad N; C
 ad S, H ad S, in ratione totali CH ad NS.

Demonstratio Propositionis.

Verissimus est hic sensus Propositionis illius 12. fa-
 reor; ex eo vendicatur eadem Propositio ab omni fal-
 sitatis labe, Concedo. Sed quæro, leuiórne an grauior
 defectus committi censendus est. Si vera hæc Proposi-
 tio concedatur iuxta hunc sensum, & eius probatio syl-
 logismo constet, qui forma careat, ut ostendi carere
 nisi ex alio sensu æstimetur; an certè falsa dicatur ea-
 dem Propositio, & legitima admittatur forma syllo-
 gistica, qua demonstratur? alterutrum enim horum
 incommodorum admitti necesse est.

Ad hæc si in eo sensu sumi debeat hæc Proposi-
 tio; quid tandem ad circuli Quadraturam conclu-
 dendam collatura est? omnino, ut opinor, nihil, cum
 tamen totam solutionem ex ea deducat Geome-
 tra Propof. 44. lib. 10. cum enim in hac Propof. 44.
 asserit, ex tribus rationibus, quarum tertia Quadraturæ
 modum,

modum, exhibere debet; primam & secundam, notas esse, ut verè notæ sunt, ut ex dictis patet; noti sunt enim earum termini? tum subdit, *Notum etiam erit quoties prima contineat secundam, atque adeò quoties secunda contineat tertiam; ipsæque proinde tertia nota erit.* Si ita intelligatur prima continere secundam toties, quoties secunda continet tertiam. Id est, prima ratio totalis constituitur, iuxta P. Alfonso, ex tot rationibus partialibus, ex quot constituitur secunda, & ex tot tertia quot secunda: quarum rationum partialium singulæ primam rationem constituentes toties sint multiplicatæ rationum partialium secundam constituentium: quoties hæ secundam constituentes multiplicatæ sunt rationum tertiam constituentium: quomodo notum est, quoties prima ratio contineat secundam? coaluerunt enim partiales illæ rationes tam primam quàm secundam rationem constituentes, & quidem ita coaluerunt, ait idem, ut simplices rationes per additionem simplicem, non autem ut multiplicatæ, aliæ aliarum: Imò potius termini siue quantitates simplices, quæ rationum fundamentum sunt, (sunt enim Rationes relatiua entia) per additionem factæ sunt vna totalis quantitas, longè aliam fundans rationem à partialibus rationibus ipsam constituentibus, quæ ea additione confunduntur & perturbantur. Quis ergo dignoscat partiales eas rationes quæ primam ac secundam rationem totalem constituent? quis in nostro casu, in quo per indiuisibilia proceditur, ac proinde infinitæ sint illæ partiales rationes? quis speciem rationum ipsarum partialium, quæ om-

C c nes

nes inter se specie differunt ; licet omnium multiplicatio eiusdem sit speciei ; assignare queat ? Notæ ergo non sunt in eo sensu prima & secunda ratio ; notum , inquam non est quoties prima ratio contineat secundam , nec ex iis nosci potest tertia ad Terragonismum necessaria. Præterea cum in his tribus rationibus nihil reperiatur commune , quod per connexionem aliquam ex duabus rationibus datis tertiam exhibeat ; præter multiplicationem ; quomodo nisi illam adhibuisset Geometra ; & ex multiplicatione rationum partialium , totalium multiplicationem colligere voluisset , iuxta sensum à me expositum Propositionis 12. ex duabus totalibus rationibus , tertiam notam fieri asseruisset ? & quidem tam leui , ut ipse censuit , operâ ut vno aut altero verbo id indicasse , satis ipsi visum sit. Quod si necdum hæc cuiquam satisfecerint contendâtque Propositionem illam 12. in eo sensu , quo R. P. Alfonsus eam exponit non tantum veram esse , sed etiam ad conclusionem Propositionis 44. Quadraturæ modum continentis sufficere : huic ego propono hæc duas rationes. Prima est numeri $18 \frac{1}{4}$ ad $222 \frac{1}{4}$. Secunda est numeri 9 ad $95 \frac{1}{2}$. Prima ratio constituitur ex duabus rationibus sicut & secunda : sunt vero rationes duæ partiales primam constituentes bis multiplicatæ duarum rationum partialium secundam constituentium. Quæro igitur ut is mihi exhibeat ex duabus datis tertiam rationem , quam duæ rationes partiales constituent : quarum singularum duplicatæ sint duæ rationes secundam constituentes ; idque non casu sed ex arte certâ

tâ & demonstratâ perficiat? Responsum operior quod si huic meæ quæstioni satisfacere nequeat, quæ tamen duas tantum rationes partiales adhibet quæ totales primam & secundam constituunt: quomodo satisfacturum sperem Propositioni 44. Authoris, in qua tertia ratio quæritur ex duabus notis prima & secunda, quæ ex rationibus partialibus non iam duabus, ut hic, sed infinitis, cum per indivisibilia procedatur ut constat ex Prop. 39. & 40. singulæ constituentur? hæc satis multa, ad rem tamen tantam non nimia: paucioribus opus omnino fuisset: si idem R. P. Alfonso sensum, ex quo Propositionem illam duodecimam lib. 10. vult concipi, ut vera sit, applicuisset conclusioni Propositionis 44. quæ terminis enunciatur eisdem plane, eandemque rationum mutuam illam continentiam exprimentibus: tradidisset forsitan ipse, quod hic ego proposui, &, opinor, euidenter probavi nimirum circuli Quadraturam hanc absolui. mediâ illâ Propositione 12, vel omnino non posse, si verus ei sensus tribuatur; vel non nisi falso posse, si ex sensu pendatur Authoris: adeo ut, utrouis modo sumatur, ea sola totum hunc Tetragonismum in apertum discrimen adducat: nec leue de reliquis tribus insequentibus, quorum par videtur causa, ex hoc iam fieri præiudicium possit. Verum propius contemplandi sunt; quod aggreddior.

Scholium.

Ex his duabus Propositionibus egregiè confirmatur decretoria illa Propositio 48: quam, vt aequissimam tucor. Quamuis (cuius me dolet) tardius comperi lapsum quendam in numeris, qui in illam influunt, Prop. 38. statutis: quem, vt longius à prælo absum, auertere tempore non potui suo. Nunc, ne cui quidpiam scrupuli resideat, auerto.

A	B	C
9	1	1
128	32	240
D	E	
331	203	
3840	1920	
F	G	
2	203	
15	960	

Citarâ Prop. ex Additione fractorum A, B, C (in re facili errores facilius) collectus est D: colligendus erat E. Vnde Propos. 45. extremâ seponendi erant F & G. Exinde, solutione Propositionis 47. ad hos numeros F & G applicata, reperiuntur numeri E C Ope numerorum, quos ordine suo refert

A 1408.	D 1512.	B 1624.	E 1683.	F 1744
C 2233.	C 2233.	C 2233.	C 2233.	C 2233

hoc schema. Itavt Ratio E

1683 ad C 2233 ea sit, quæ quæritur. Hæc autem eadem est cum Ratione Quadrantis A I K ad mixtum Quadrilaterum Z O K L H, vt Prop. 48. declaratur; cuius Conclusionem iuxta restitutos numeros E & C repeto. Vt Quadrans A I K ad mixtum Quadrilaterum Z K; ita E 1683 ad C 2233. Ergo vt duæ tertiæ Quadrantis A I K, nempe sector I O L, ad Quadril. Z K; ita duæ tertiæ numeri 1683, nempe 1122 ad C 2233. Et Diuidendo. Vt sector I O L ad Triang. O I L, ita 1122 ad 1111 excessum numeri 2233 supra 1122. Sed Trapezium I O K L (ductas concipe rectas K O, K L) maiorem habet Rationem ad Triang. O I L; quàm 1122 ad 1111 (vt enim Trap. I O K L ad Triang. O I L; ita I K 100 000 sinus totus ad I C 86603 sinum G. 60) Ergo Trap. I O K L per 10. lib. 5. maius est sectore I O L, pars toto. Quod, &c.

Addo etiam ex occasione, nouam, quæ occurrit Confirmationem illius Prop. 48. Vt sector I O L ad Triang. O I L: ita Circulus ad Hexagonum Circulus verò posito radio 100 000 est proximè 314159. Hexagonum autem 259809. At longè aliam Rationem seruant hi numeri 1122. 1111. Ergo admitti non debent.

Hoc Argumento reiicientur etiam, quæ in eiusdem Prop. 48. scholio traduntur ex altero sensu. Numeris enim 256. & 331, substituentur 128, & 203: & numeris 331 & 484, numeri 203 & 242. Ex quibus, vt ibi declaratur, concludetur Rationem $135 \frac{1}{3}$ ad $106 \frac{2}{3}$ siue 203 ad 160, eandem esse cum Ratione sectoris I O L ad Triang. O I L, vel Circuli 314159 ad Hexagonum 259809. At longè sunt dispares hæ Rationes duæ: & longè longius Ratio 203 ad 160 recedit à verâ, quàm 314159 ad 259809: quæ veræ proxima est.



LIBER TERTIVS.

Tres reliquæ Authoris Quadraturæ expenduntur, & quod subesse videtur vitium, aperitur.

PROP. I. THEOR.

Si circa axem AB Parabola quæpiam $MA D$ descripta sit: cuius lateri recto æqualis lineæ AI superaxe reponatur à vertice A : & per I Applicata ducatur ordinatim IM . Dico ordinatam IM esse æqualem ipsi lateri recto, siue lineæ AI .

Demonstratio.

Quadratum ordinatæ IM æquale est per 11. lib. I. Fig. 15. Apoll. rectangulo, quod sub sagitta abscissa IA & latere recto continetur. Sed IA æqualis est lateri recto ex constructione: ita ut rectangulum illud sub IA & latere recto Quadratum sit. Ergo Quadratum ordinatæ IM æquale est Quadrato lateris recti. Ergo & ipsa Quadratorum

Cc 3

LIB. III. Examen triplicis Quadr. postér. 207
MI, æqualis ea sit tam lateri recto, quàm abscissæ sagittæ IA.

Demonstratio.

Clara est hæc Propositio ex præcedenti. Cum enim *Fig. 25.* ex constructione angulus IAM sit semirectus, rectusque angulus I: erit semirectus angulus AMI, atque adeò æqualis angulo A trianguli AIM. Æqualia sunt ergo latera IA, IM. Quia verò Quadratum IM æquale est rectangulo sub IA & latere recto: rectangulum illud Quadratum esse necesse est; atque adeò latus rectum, quod Quadrati latus alterum est; æquale erit lineæ AI ad verticem abscissæ; ergo & alteri lineæ quæ sit eidem AI, æqualis; ordinatim scilicet Applicatæ IM. Quare si duæ lineæ, &c. Quod erat probandum.

PROP. III. THEOR.

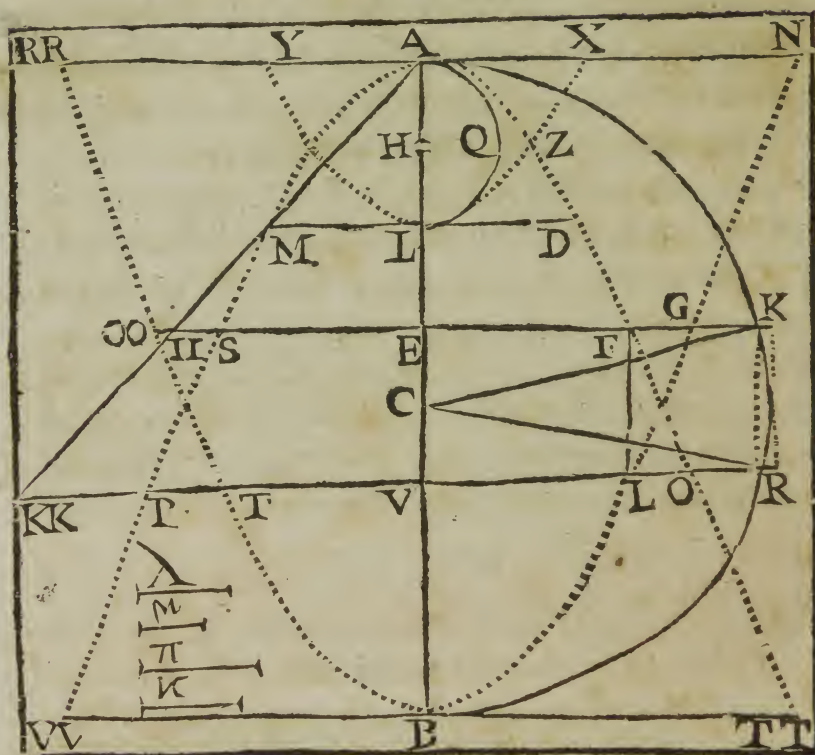
Si à vertice A Parabolæ cuiusvis MAD, linea *Fig. 25.* recta emittatur faciens cum axe AI angulum semirectum, Parabolam sectura est, vt in M. Vnde si Applicata ad axem ducatur MI: erit tam Applicata MI, quàm abscissæ IA, lateri recto Parabolæ æqualis.

Demonstratio.

Nam in triangulo AIM, cum angulus I, sit rectus, *Fig. 25.* & A semirectus; semirectus erit & M; atque adeo latera IM, IA æqualia per 5. lib. 1. Quibus vtrisque æquale esse necesse est latus rectum Parabolæ, vt ex præcedenti

denti ratiocinatione patet. Quare si à vertice, &c.
Quod erat demonstrandum.

Figura Vigesimaquinta.



Corollarium I.

Fig. 25. Hinc ergo primò modus habetur perfacilis definiendi latus rectum datæ cuiusvis Parabolæ. Si enim ducatur linea recta AM cum axe AI angulum semirectum continens: ea secabit Parabolam in puncto, ut M, à quo si ducatur ad axem AI ordinatim Applicata MI: erit tam ipsa MI; quam abscissa sagitta IA, æqualis lateri recto Parabolæ.

Corolla

Corollarium II.

Hinc etiam sequitur, si sumpta sagitta AI æquali lateri recto, ductaque ordinatâ IM; emittatur à vertice A linea, quæ cum axe AI angulum semirectum contineat, ipsum per M, in quo ordinata Parabolam secat, necessariò transcuram.

PROP. IV. THEOR.

Sit AB axis communis æqualium & similium Parabolarum subalterne positarum AMS, Fig. 25.
BLG. Circa verò axem communem AB semicirculus describatur, quem linea quævis ordinatim Applicata ad axem, secet in K; Parabolas autem subalternas in S & G. Dico lineam EK ad lineam EG ita se habere: vt linea ES se habet ad latus rectum Parabolarum.

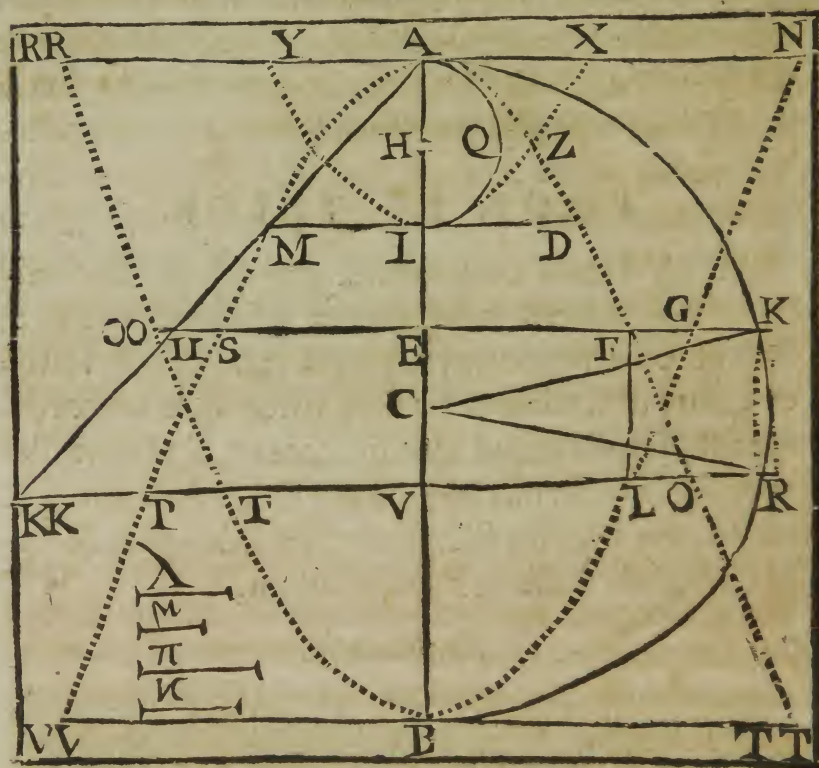
Preparatio.

Absoluatur Parabola SMA descripto eius altero cornu AFO. Erunt obuersa inter se duarum Parabolarum cornua AFO, BLG: eritque EF æqualis ordinatæ ES: ita vt asseri possit eodem modo, quatuor lineas EK, EG; &, EF & latus rectum, esse proportionales. Item sumptâ BV æquali, linea AE; siue CV æquali, sumpta lineæ CE: ducatur per V ad axem normalis secans in R circulum; obuersas verò Parabolas in L & O. Erunt ergo EK, VR æquales ob æquales positas AE, BV. Æquales item propter eandem

D d rationem

rationem tam EF, VL; quam EG; VO. Sunt enim
 Ordinatum Applicatae à verticibus A & B æqualium &
 similium Parabolarum æqualiter distantes.

Figura Vigesimaquinta.



Demonstratio.

Cum ad semicirculi diametrum AB sit EK per-
 pendicularis, atque adeo media proportionalis inter
 diametri segmenta AE, EB: erit AE: prima trium
 proportionalium AE, EK, EB, ad tertiam EB: ut
 Quadratum primæ AE ad Quadratum secundæ EK.
 Sed ut AE ad EB, siue ad AV, lineæ EB æqualem;
 ita

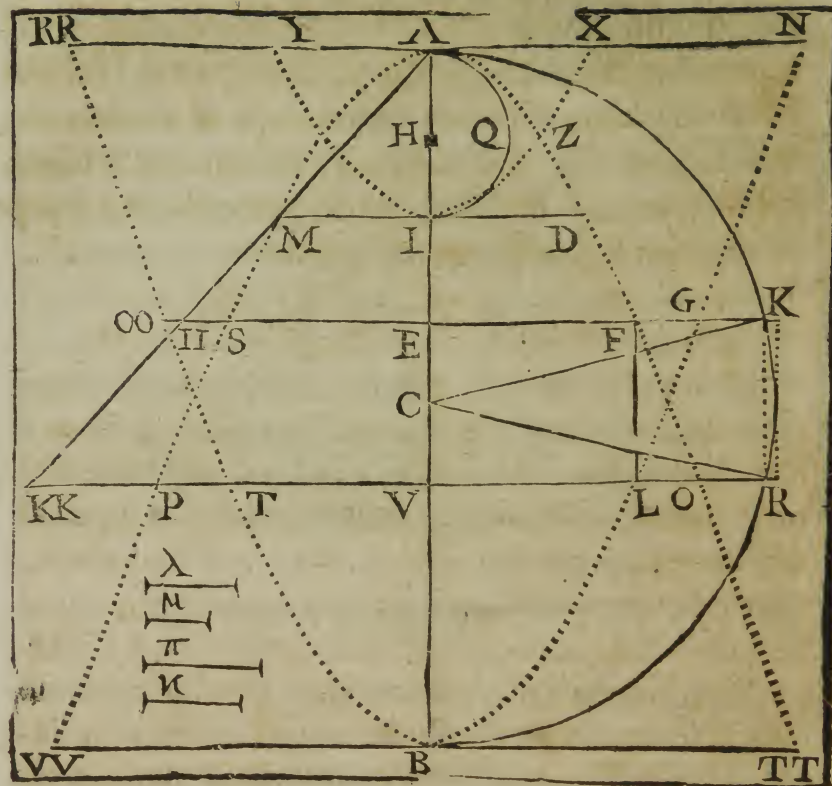
ita est per 20. lib. 1. Apoll. Quadratum EF ad Quadratum VO. Ergo ut Quadratum AE ad Quadratum EK; ita est Quadratum EF ad Quadratum VO. Ergo etiam horum Quadratorum proportionalium proportionalia erunt latera. nempe erit AE ad EK; ut EF ad VO siue ad EG, lineæ VO æqualem. Et permutando. ut AE ad EF; ita EK ad EG. Sed EF media est proportionalis inter latus rectum & lineam AE (est enim Quadratum lineæ EF æquale rectangulo sub latere recto & linea AE comprehenso per 11. lib. 1. Apoll.) Ergo ita est EF ad Latus rectum, ut EA ad EF. Sed ut EA ad EF; ita ostensa est EK esse ad EG. Ergo EK, EG; & EF, Latus rectum, sunt proportionales. Quod erat probandum.

Scholium.

Non alio sanè modo idem demonstrabitur, si subalternæ siue obuersæ Parabolæ æquales & similes, alios & alios vertices oppositos nanciscantur. Cuiusmodi sunt Parabolæ duæ obuersæ AZD, IZX: circa quarum communem axem AI semicirculus describatur AQI; & linea quævis ad axem perpendicularis tam circulum quàm Parabolæ secans, adinstar lineæ EK, ducatur. Eadem enim semper futura est demonstratio.

PROP. V. THEOR.

Descriptis, ut in præcedenti Propositione, *Fig. 25*
duabus Parabolis æqualibus & similibus siue
subalternis ASVV, BLN; siue obuersis AFTT,
Dd 2 BLN.



BLN. Descripto etiam circa axem communem AB semicirculo: ductis præterea ordinatim Applicatis quibuscumque EF, VO; quæ, si producantur, circulum secant in K & R. Dico corpus Cylindricum mixtum; cuius scilicet basis sit Quadrilaterum mixtum EKR V, & altitudo sit latus rectum Parabolæ: æquari corpori quod oritur ex segmento EVPS ducto in segmentum subalternum EVLG: vel, æquari corpori, quod ex segmento EVOF ducto

ducto in segmentum obuersum $EVLG$, generatur. Imò totus semicylindrus, cuius basis est semicirculus $AKRB$, & altitudo latus rectum Parabolarum, æquatur solido: quod ex tota Parabola $ABVV$ ducta vel in totam Parabolam subalternam ABN , vel, quod idem est, in totam obuersam $ABRR$, generatur.

EXPOSITIO.

Hæc vna Propositio mea tres complectitur Propositiones doctissimi Geometræ. Prima earum est 143. libri de ductibus. Secunda est 51. lib. 10. eadèmq; est *Fig. 25.* cum priore, noua tamen & ampliore probatione confirmata: tertia denique est 68. Prop. eiusdem lib. 10. Duæ priores, quæ idem sonant, in casu tantum singulari versantur: cum scilicet axis communis AB duarum Parabolarum obuersarum circa quem semicirculus basis futuri semicylindri describitur, æqualis est lateri recto Parabolarum. Tertia verò illa Propositio 68. lib. 10. Vniuersalis est liberamque admittit quantitatem axis AB communis, circa quem basis circularis semicylindri describatur: quemadmodum eandem conditionem admittit Propositio mea. Verum in assignanda altitudine semicylindri illius, qui super semicirculo circa axem AB descripto erigatur: quique sit *Fig. 25.* æqualis solido ex ductu in se Parabolarum subalternarum; in eo, non opponimur quidem, verum dissimiles sumus: quod ego altitudinem semicylindri, certam semper & unicam definio: quantitatem scilicet lateris

D d 3 recti

lum sub E K & quarta illa proportionali æquale sit re-
ctangulo sub ordinatis E F , E G. Illa verò quarta
proportionalis quocumque casu posito axis A B com-
munis Parabolarum, id est, quocumque spatio distent
à se inuicem vertices A & B Parabolarum, semper erit
Latus rectum axi Parabolarum congruens. Vt clare
demonstravi Prop. 4. proxime Antecedenti: Quæ mira
est Lateris recti facultas, mirumque mihi præbitura est
compendium cum ad calculum ventum fuerit: vt mi-
rari satis nequeam vel à Geometra subtilissimo non
obseruatam, vel obseruatæ mentionem nullam factam.
Nullum ergo aliud discrimen est inter hanc meam
Propositionem, & tres illas citatas Authoris Te-
tragonismi, nisi quod in definienda illa semicylindro-
rum altitudine, qui sint æquales solidis ex ductu Para-
bolarum subalternarum ortis, asseruerim ego eam esse *Fig. 25.*
Latus rectum Parabolarum: asseruerit ille, eam esse
Latus rectanguli cuiusdam; siue idem siue diuersum
in diuersis casibus existat, non attendens, vel non cu-
rans; Quod tamen, vt exposui, aliud nunquam erit,
quam Latus rectum Parabolarum: ita vt allata hæc Pro-
positio mea ab illis tribus in re nullo modo dissentiat:
atque adeo demonstratio Authoris æque huic meæ, at-
que illis tribus conueniat; quam vt firmissimam ad-
mitto, nec aliquam eius confirmationem (quæ sane
suppeteret) asserendam censeo breuitatis causâ consu-
latur ergo Author super hac re, & ex citatis locis Pro-
batio petatur vnde constet, quod descriptis, vt in præ-
cedenti, &c. Quod erat demonstrandum.

PROP.

rabolam AVO : siue quod idem est, semiparabolam AVO ductam in se, corpus producere æquale solido: cuius basis sit triangulum $AVKK$; altitudo verò latus rectum Parabolæ.

Dico præterea Quadrilaterum Parabolæ segmentum $EVOF$, siue $EVPS$ in se ductum generare solidum æquale solido; cuius basis sit Trapezium $EVKKII$; altitudo verò idem etiam latus rectum Parabolæ.

Demonstratio.

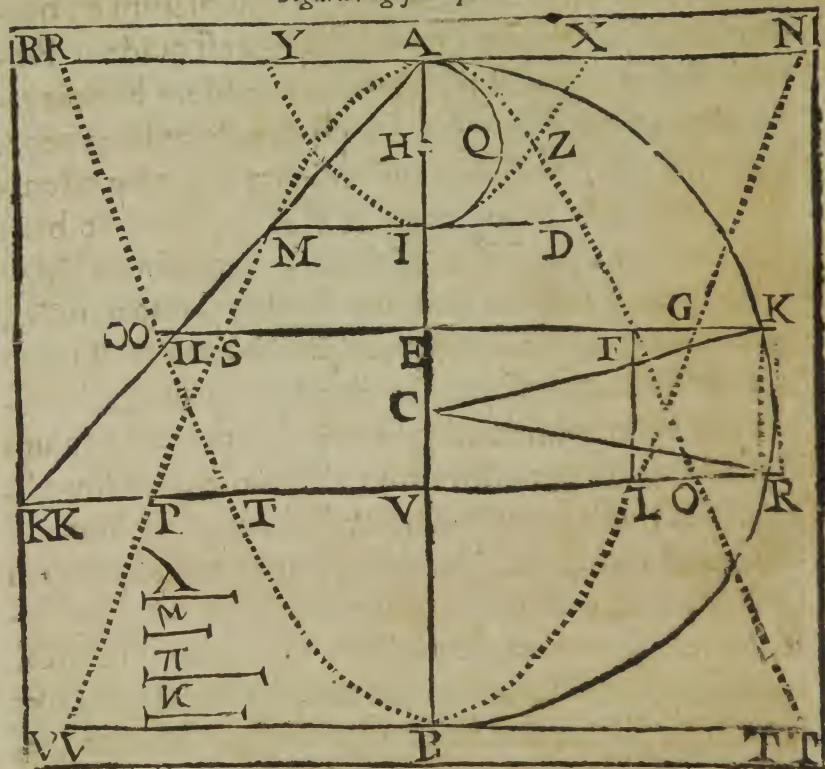
Per punctum M , in quo linea AKK angulum semirectum cum axe constituens, Parabolam secat: ducatur ad axem ordinata MI . Hæc erit per Prop. 3. huius, lateri recto æqualis. Sed per Prop. 161. Libri ductuum corpus ortum ex semiparabola APV in se ducta, est æquale Prismati, cuius basis est triangulum $AVKK$, & altitudo MI , siue latus rectum Parabolæ, ipsi MI ostensum æquale. Constat ergo prior Assertionis pars.

Posterior verò sic ostenditur. Per citatam Prop. 161. ductuum. Semiparabola AES in se ducta generat corpus æquale solido siue Prismati cuius basis est triangulum $AEII$; altitudo verò recta MI siue latus rectum. Si ergo à Prismate, cuius basis est triangulum $AVKK$, & altitudo latus rectum, cui est æquale ostensum solidum ex ductu semiparabolæ AVP in se genitum: dematur Prisma super triangulo $AEII$ ad altitudinem lateris recti constitutum, æquale ostensum solido ex semiparabola AES in se ducta genito: remanebit soli-

E e dum

dum super basi Quadrilatera EVKKII ad altitudinem lateris recti excitatum, æquale solido, quod fit ex Quadrilatero mixto SEVP in se ducto. Vtraque ergo pars Assertionis vera est.

Figura Vigesimaquinta.



Corollarium I.

Fig. 25 Hinc fit ut si aliæ & aliæ Parabolæ, Parabola VATT ampliores vel angustiores, prout latus earum rectum maius erit vel minus latere recto MI Parabolæ VATT, describantur: omnes semiparabolæ eadem ordinatim Applicata tanquam base abscissæ si in se ducantur, solida

solida generent æqualia Prismatibus, quorum omnium basis vna eademque sit solaque altitudine differant, quam metitur latus rectum in diuersis parabolis diuersum. Ac propterea ita se habeant huiusmodi corpora, vt se habent inter se latera recta parabolarum ex quarum ductu in seipsas, proficiscuntur: si quidem Prismata super æquali basi constituta eandem habent rationem inter se, quam habent eorum altitudines per 8. lib. 12. Vt in hoc schemate ordinata VP quæ ostensa est constituere triangulum $AVKK$, quod sit basis Prismatis æqualis solido ex ductu semiparabolæ VAP in se genito; abscindet alias & alias semiparabolas, quemadmodum abscindit semiparabolam AVP ; quæ si in se ducantur, solida producent æqualia Prismatibus; quorum omnium basis erit semper triangulum $AVKK$ semel constitutum: altitudo verò à singulis lateribus rectis singularum Parabolarum definietur.

Quod verò de semiparabolis integris asseritur: idem de segmentis earum inter duas ordinatas ad axem interceptis asseri debet. Erit scilicet Trapezium $IEVKK$ basis omnium solidorum quæ æqualia sint solidis, quæ segmenta parabolica inter duas ordinatas intercepta, cuiusmodi est segmentum $SEVP$, in se ducta generant: itavt horum omnium solidorum discrimen totum sit penes diuersam quantitatem laterum rectorum.

Corollarium II.

Ex Propositione 5. præcedente colligitur idem con- Fig. 25.
tingere in ductibus subalternis semiparabolarum ea-

Ee 2 rumque

quidem est quamcumque semiparabolam $ABVV$ in se subalterne ductam solidum generare æquale semicylindro; cuius basis est semicirculus $AKRB$, altitudo verò latus rectum Parabolæ eiusdem. Cum itaque omnium semicylindrorum corporibus illis ex ductu subalterno ortis æqualium, una eadēque sit basis, nempe semicirculus $AKRB$. Sint autem omnes semicylindri, sicut & cylindri, quorum æqualis est basis, ita inter se, ut inter se sunt eorum altitudines, quæ sunt latera recta. manifestum est, corpora omnia ex ductu subalterno Parabolarum omnium, quarum idem sit axis, verbi gratia, AB , genita ita se habere inter se, ut se habent singularum latera recta. Id porro locum habet non solum in Parabolis integris, verum etiam in segmentis Quadrilateris inter duas ordinatim Applicatas interceptis. Ostensum enim est Quadrilaterum $EVPS$ in Quadrilaterum subalternum $EVLG$ ductum, corpus generare; quod sit æquale semicylindri portioni, cuius basis est planum mixtum $EKRV$, & altitudo latus rectum parabolæ PAO . Quod de omnibus Parabolarum subalterne positarum circa axem communem AB , segmentis inter easdem lineas parallelas SEF , PVO interceptis demonstrari potest. Sed corpora omnia super basi eadem $EKRV$, ita erecta; non aliter se habent inter se, quam se habeant altitudines, quæ sunt latera recta Parabolarum; servant enim huiusmodi corpora licet mixta, quorum facies superior est basi eorū, & parallela & æqualis & similis, rationes vel Prismatum vel Cylindrorū, quorum partes quædā sunt.

Fig. 25.

E e 3 *Monitum.*

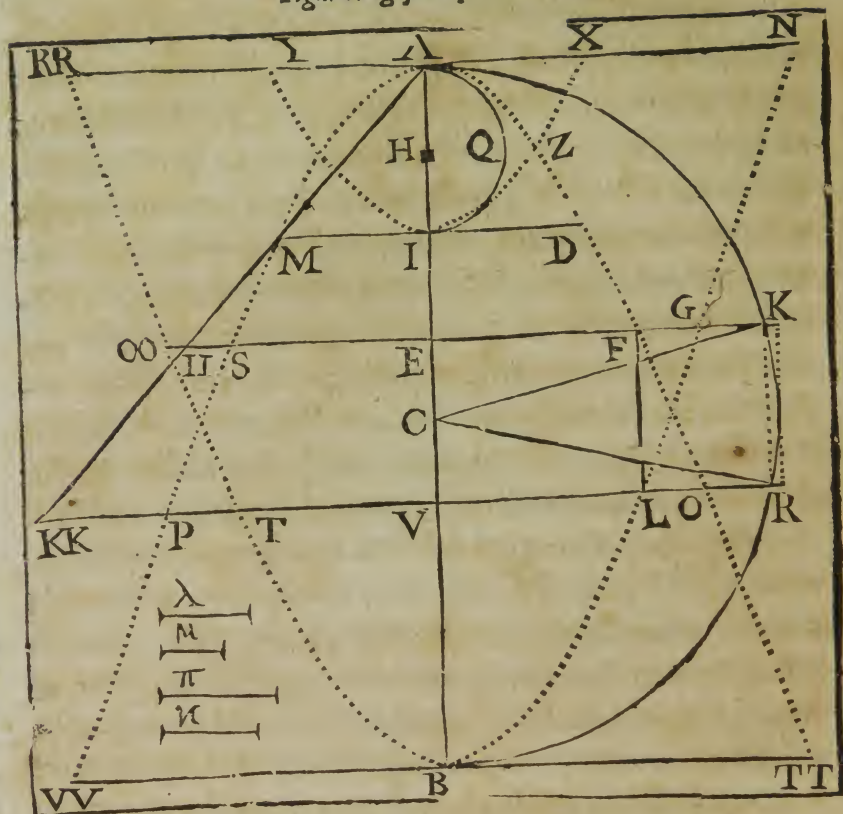
Monitum.

Consequenter ad duas præcedentes Propositiones 5. & 6. in quibus definitur; cui solido sit æquale corpus ortum ex ductu tum directo, tum subalterno; tam integrarum Parabolarum, quam earum quarundam partium mixturam, quas duæ ordinatæ & axis circumscribunt vnâ cum arcu ab ordinatis intercepto. Definienda nunc forent corpora, quibus æqualia sunt solida ex aliis segmentis Parabolarum, quibus ea conditio non competit, vt axis sit aliquot eorum latus. Sed loco id ostendetur ad concipiendum aptiori, vbi ad calculum ventum fuerit: quo duas præ cæteris Propositiones, ex quibus tota vel firmitas vel ruina Tetragonismi non tantum secundi; quo de agimus hic ex Instituto; sed etiam tertij & quarti, vt constabit consequitur. Earum prior est sexagesima secunda lib. 10. operis Geometrici: posterior verò est eiusdem lib. 10. septuagesima septima: quas necessarium est hic in medium adducere, vt scopus percipiatur in quem tandem contendant omnia ferè, quæ in posterum propositurus sum, certiusque de hac lite tota, quæ ex iis pendet, iudicium feratur. Prior ergo in hæc verba sonat, quam seruato ordine meo exhibeo.

P R O P. VII. T H E O R.

Authoris Quadraturæ 62. lib. 10.

Fig. 15. Eadem, inquit, figura manente, id est, in schemate meo



etiam ducta in seipsa: ut Ratio inter segmenta Parabola A I D & F L O ducta in seipsa subalterne; est ad Rationem inter segmenta Parabola F S P L, & A I M etiam ducta in seipsa subalterne. Ita habent Authoris vel verba, vel sensus in hac Propositione. Quam ut certissimam admittit ipse & vniuersalissimam in omni casu & loco, in quo sumere libeat diametros æquales A I, F L. Per quarum extrema puncta ducantur lineæ ad axem perpendiculares, siue ordinatim ad axem Applicatæ

Applicatæ. Hæ enim superficies parabolicas semper continebunt, quæ in se ductæ eo ordine, qui hic obseruatus est; solida generabunt dictas hic rationes semper obseruantia. Hic ego casum assumo de industria, in quo altera assumptarum diametrorum sit etiam axis, qualis est AI ; licet parallelarum altera per eius extrema puncta ductarum, nempe quæ per A ducitur, Parabolam non fecer, sed eam tantum in A tangat. Neque enim minus hæ quam aliæ quælibet parallelæ per extrema diametrorum æqualium ductæ, duas superficies claudunt parabolicas, solida per suos ductus generandi capaces; quæ cum solidis ex aliis alio in situ positis superficiebus, ortis comparari queant. Ideo verò casus hic peculiaris à me hic adhibetur; sæpiusque adhibebitur in posterum ob insignia quæ præstat in calculo compendia, vt experientia docebit; iamque vel ex eo patet: quod clausa inter Parallelas segmenta duo AID , AIM sunt æqualia ipsique axi adiacent reliquarum diametrorum & nobilissimo & notissimo.

Demonstrationem quam habet Author ad veritatem Propositionis huius suæ stabiliendam, non adscribo: tum quia ei, numerorum luce coactus olim non subscribam: tum quia longioris est operæ, & grauioris quàm exigar institutum meum; cui sufficit sola ipsa & simplex expositio Propositionis, eiusque sensus declaratio. Quod à me est præstitum cumulate.

Monitum.

Secunda Authoris Propositio, de qua superius in
Ff monito

monito Propositionis 6. facta est mentio, ipsa est 77. & vltima, qua rectilineum aliquod Curuilineo æquale exhibere conatur; atque vtinam fœlix euentus tanto conatui tandem respondeat; sitque æquum tanti laboris, industriæ, & operæpretium. Sed in dubium, hanc ipsam solutionem reuocare videtur iudicium Arithmetices; dum in præcedentem Propositionem, cui tota Problematis soluendi ratio innititur, sententiam fert condemnationis, quo verò iure, constabit abundè inferiùs: Id in præsentiarum videndum. Quomodo solutio Problematis ex citata Propositione ita pendeat, vt ea concussa, ipsa stare nequeat. En ergo Authoris si verba non omnia, merus tamen sensus ex schemate meo exhibitus, & in ordinem meum reposita Propositio.

PROP. VIII. PROLB.

Authoris 77. Libri Decimi.

Fig. 25. Sit axis AB Parabolæ AFO, BLG; & AZD; IZX subalterne constitutarum: sumptis deinde AE, BV æqualibus, eius quantitatis, vt intercepta linea EV æqualis sit lineæ AI (quod facile fiet, si AB bifariam in C; & AI bifariam in H diuidantur: sumanturque CE, CV æquales lineis HA, HI: erunt enim tunc AE, BV. æquales; deductis scilicet CE, CV æqualibus ab æqualibus CA, CB) ducantur demum ordinatim Applicatæ EG, VO: & ID. quæ producantur quantum satis, *Oporteat autem, inquit, rationem exhibere; quæ est inter corpora, quæ oriuntur ex subalterno ductu*

FLO in seipsum : & ex ductu FLPS in se ; & AIM in seipsum , eadem sit cum Proportione , quæ reperitur inter rationes corporum , quæ fiunt ex ductu subalterno eorundem planorum. Igitur Permutando, Proportio quæ est, &c. olim reliqua hæc interim satis.

Quid enim pergam ulterius? Nunquid non satis patet ex his , totam Problematis huius constructionem eiusque demonstrationem ex citata & explicata ad Prop. 7. huius. Propositione illa 62. ita pendere , vt ex illius statu huius etiam fortuna tota pendeat? quod hic declarare quàm fieri potuit apertissime , necessarium erat; cum eam solam Propositionem in dubium adducant numerorum rationes exponendæ. Quas ante quam moneo.

Subsisto paulisper admiratione defixus cur Author celeberrimū illud Problema : quod omnes Geometriæ facultates copiosissimas elusit hactenus: In cuius gratiam tam multam Propositionum vim arduo sane diuturnoque labore ipse congescit; tam paucis perstrinxerit; solutioneque tam leui concluderit vix vt tres versiculorum ordines adæquet, eosque obiter & quasi porisma quoddam proposuerit. Sed hac in re consultissimi viri institutum absit vt carpam quod eò venior magis, quo minùs eius conscius ego sum: Pluscula fortasse ad calcem de rota hac solutione in medium adducam : Interim expositionem aggredior eorum, quæ citatam illam Propositionem 62. in discrimen adducere videntur. Quæ tota exercitatio vt planior fiat : quædam tanquam prænoscentia prius expono.

Monita.

Monita.

Primò ergo obseruandum est : cum duplex metho-
 dus iniri possit , qua superiùs allata propositio septima,
 quæ est Authoris sexagesimasecunda libri 10. discu-
 tiatur : altera , qua principia vel conclusiones , vnde
 totum robur suum haurit , perpendantur : altera , qua
 ex eius suppositione facta , obseruetur , si quid vel im-
 possibile vel absurdum , aut aperte falsum consequatur ;
 vt hinc arguatur , iuxta Logices statuta , aliquid vitij
 admissum in Antecedentibus , licet necdum constet
 vbi lateat : breuior mihi visa est & absolutior secunda
 hæc ratio. Vbi præsertim obseruaui me numerorum
 aũxilio vti posse , qui nudam & apertam rerum verita-
 tem , quoties consuli possunt , exhibere solent : quan-
 quam vix dici queat , quam egrè eò tandem totam
 hanc difficultatem adduxerim ; adduxi tamen , nec nisi
 fallor , omninò perperam.

Secundò moneo. Cum in sequentibus futurum sit
 non rarò , vt radices è numeris irrationalibus sint
 eruendæ , quas non facilius ad veras (si tamen veræ
 dici queant , quæ impossibiles existunt) admoueas ,
 quàm ope numerorum fractorum , quos decimarum
 vel decadicos appellant ex eo , quod eorum denomi-
 nator sit semper vel denarius , vel per denarium produ-
 ctus : eis me maximo cum compendio , cum res feret ,
 vsurum : sed ita vt designatione paulò commodiore
 vtar , quàm consuetus ferat modus. Qui iubet vlti-
 mam numeri figuram tot accentulis notari , quot con-

Ff 3 tineret

tineret figuras nihili siue zero denominator, si ad
 longum more solito exprimenda fractio foret. Exem-
 plum esto. Vis numerum hunc $24 \frac{258}{1000}$ in modum de-
 cadicorum exprimere; ita haberet, 24258. Ultimâ fi-
 gurâ tribus accentulis acutis inustâ; qui indicent De-
 nominatorem tribus zero præfixâ vnitare constare: vel
 etiam significent tres posteriores Characteres totius
 numeri ad fractionem pertinere; reliquas verò duas
 24. priores, numerum esse integrum; cui fractio adhæ-
 ret. At quis non videat non satis apte tot accentulis
 vnicam ultimam notam onerari? quis non laboret in
 assignandis vnicuique figuræ antecedenti suorum ac-
 centuum debitam multitudinem. præsertim cum nu-
 merosior fuerit accentuum copia? quis, nisi agrè, nu-
 merum integrum, (si quis præfigatur fractio) ab adhæ-
 rente fractio distinguat? Censeo ergo longe commo-
 diùs fore, si ipsa prima fracti numeri figura vnico ac-
 centu notetur; reliquæ verò deinceps figuræ vno sem-
 per plus notari censeantur. vt in dato exemplo, ita no-
 tari debere censeo datum numerum 242'58. figurâ sci-
 licet 2 accentu notatâ, reliquis insequentibus intactis,
 licet & ipsæ notari censeantur accentulis vno semper
 plus, quo magis à primâ notatâ recedunt. Quod si
 fractio numero nullus præfigatur numerus integer, fi-
 gurâque prima notanda non ad Denominatorem 10
 (sic enim accentu suo vnico inureretur) sed ad 100
 vel 1000. pertineret: tunc præfigendæ forent tot figu-
 ræ nihili, quot vnâ minus, figuras nihili continet De-
 nominator. Vt, si hic numerus $\frac{5}{100}$ vel $\frac{5}{1000}$ notandus
 foret

foret & in classem decadicorum adsciscendus. Ita exprimeretur $o's$, vel $o'o's$. vel certe tunc tot accentus apponantur figuræ illi, quot exigit Denominator, hoc modo s'' vel s''' . Reliquas operationes horum decadicorum non attingo, non enim id ago: moneo tantum mira compendia ab huius generis numeris præstari: moneo ita plane tractandos, ac tractari solent consueti fracti numeri, solius diuersæ designationis habita ratione. His prænotatis ad rem propiùs accedamus, seruatò Propositionum ordine & numero.

PROP. IX. PROBL. •

Systema seu figuram vniuersalem construere quæ sola deinceps vsui futura sit.

Paucis superiùs perstricta est systematis huius constructio: quam hic, vt locus exigit, iterum expono paulò distinctius.

Constructio.

Circa lineam AB tanquam axem Parabolæ duæ *Fig. 25.* æquales & similes obuerso situ describantur $VVATT$, $RRBN$; quarum A & B sint earum vertexes. Diuiso deinde axe AB bifariam in C , duæ sumantur eius particulæ CE , CV æquales: quibus sumantur æquales AH , HI ; ita vt rota EV , toti AI sit æqualis. Tum per I , E , & V ordinatæ ducantur ad axem vtrumque productæ ID , IM : EF , ES : VO , VP . Ad hæc describatur circa axem AI , Parabola YIX æqualis & similis Parabolæ MAD eique obuersa. Præterea duo puncta S & T ;
item

Denique fiat angulus semirectus B A K K, ducta AKK quæ ab ordinatis, si producantur, secetur in II, & K K. Hoc est systema præter quod vix aliud ad rem nostram desideretur.

Ecce enim in primis hypothesim necessariam ad *Fig. 25.* Propositionem illam 62. lib. 10. Authoris, quam versamus: cuius paucis hic memoriam refrico. Sunt ergo duæ diametri A I, F L positæ æquales. Sunt per earum extrema ductæ ad axem perpendiculæ RRAN, MID, & S E F, P V O. Sunt duo constituta segmenta æqualia sibi obuersa A I D, I A X; & F L O, L F G: duo item F S P L, L T O O F: quibus æqualia sunt duo S F O T, T L G S, & similiter posita, ut eorum loco ea liceat adhibere. Ergo iuxta Propositionem illam 62. proportio quæ est inter rationem, quam habet corpus ex segmento A I D in se ducto genitum, ad corpus genitum ex segmento F L O in se ducto: & Rationem quam habet corpus ex segmento E L P S vel huic æquali S F O T in se ducto ortum, ad corpus ex segmento A I M vel huic æquali A I D in se ducto genitum; æqualis est ex Authoris sententia proportioni, quæ est inter rationes corporum, quæ ex eisdem segmentis in se subalterne eodem ordine ductis generantur. Istud porro est de quo dubitatur, & de quo arbitra consuli debet Arithmetica; cui ut clariùs causa tota proponatur, & breuiùs, omissa ductuum illorum tam prolixa commemoratio-
ne, quæ sæpiùs repetenda occurret: Primum corpus ex segmento A I D in se ducto genitum vocabimus A.
Secundum verò ex segmento F L O in se itidem ducto

G g ortum

LIB. III. *Examen triplicis Quadr. poster.* 235
 ter rationes E, F, & GH: quæ ad subalternos ductus per-
 tinent; vocabitur MN. Ac tandem proportionalitas
 inter hæc duas proportiones KL, & MN: dicatur
 PQ. En collectam harum omnium denominationum
 lucis, memoriæque causa synopsim. Consule etiam
 Propositionem 6. lib. I.

solida	AID	}	Ratio	A	K	L	}	proportio	P	Q
ex du-	FLO									
ctu				B						
in se										
veleo.	SFOT	}	Ratio	C						
rum	AIM			D						
bases.										
solida	AID	}	Ratio	E						
ex du-	FLO			F						
ctu in										
se sub-	SFOT	}	Ratio	G						
alter-	AIM			H						
no, vel										
eorum										
bases.										

PROP. X. PROBL.

Ex data linearum aliquot in systemate desi-
 gnatarum quantitate in numeris: Reliquarum
 quantitatem in numeris colligere.

Gg 2 *Solutio.*

Solutio.

Hoc est ineundarum omnium operationum fundamentum : quæ eò certiores expeditioresque futuræ sunt : quo aptiores numeri hic primùm suppositi fuerint. Vix queam referre quam varios consuluerim numeros, quam multos animo calamóque versarim : qui tandem vel in irrationales vel in fractos, abeuntes calculum turbabant meum tædióque cumulabant, licet alioqui scopum attingerent. Comperi demum reperi- tum iri aptissimos; si Quadratum quempiam nume- rum in duos Quadratos numeros, qui dato excessu, etiam Quadrato si luberet, sese superarent : cuius ænig- matis solutio ope Algebræ expedita est : nullos tamen aptiores suffecit (suffecit autem quam plurimos) quàm qui obuij sunt & apud Artifices etiam triti ad angulum rectum constituendum; nimirum 3.4.5. quorum Qua- drati sunt 9. 16. 25. huiusmodi, vt maximus 25. in duos 9 & 16 Quadratos diuidatur. horúmque maiorem 16 excessu superat Quadrato nempe 9. Nec eos tantùm cum compendio licebit adhibere, sed etiam cum eo- dem alios quoslibet horum æquè multiplices, vt infe- riùs constabit. Verùm tandem quorsum horum nu- merorum mentio? En eorum ad systematis lineas ap- plicatio.

Fig. 25. Esto igitur AV partium 25. AE 16, AI 9. Erit EV partium 9, & erit æqualis lineæ AI. Erunt præterea VK 9, ET 16, IM 9. Sunt enim æquales singulæ singulis lineis VA, EA, IA propter angulos semire- ctos

docebit, calculus longè compendiosior futurus est, cum vnitas vel multiplicans vel diuidens numerum quemlibet, nullam in eum inducat mutationem. Posito ergo latere recto 1. ordinatim Applicata VO erit 5.

Fig. 15. EF 4. ID 3. Nam Quadratum ordinatæ VO æquale est rectangulo sub latere recto 1, & abscissâ sagittâ VA 25. per 11. lib. 1. Apoll. Quadratum ergo ordinatæ VO est 25 ac proinde ipsa ordinata, cum sit illius Quadrati radix, erit 5. Par est reliquarum EF, ID ratio.

Restat inuestiganda linea EK siue VR. Cum linea CA siue CK nota sit, nempe partium $20\frac{1}{2}$ siue ex lege decadicorum, 205'. Quadretur hic numerus fiet 4202'5. Ex eo Quadrato dematur Quadratum lineæ CE 45'; quod est 202'5: remanebit Quadratum EK 4000'0 per 47. lib. 1. Eucl. siue expunctâ fractione, quæ hic inutilis est, 400. huius radix Quadrata 20 exhibet quantitatem lineæ EK. Quæ eadem habetur, si BE 25 multiplicet EA 16. & ex producto 400 radix Quadrata 20 eruatur. Est enim KE media proportionalis inter EB, & EA.

Nunc quæro semicircularū AQI, AKB perimetrū ex datis diametris AI 9 & AB 41. Ex recētiorū Geometrarum peritissimorū calculo, circuli diametro positâ 1, perimenter polygoni circulo circūscripti laterū 2560 minor est quam 31'4160: inscripti verò maior quàm 31'4159, ita vt ne vnitate (quæ tercenties millesima parte huius numeri minor est) inter se discrepent hæ duæ circuli perimetri. Si ergo tales sunt circuli AQI perimetri posita diametro AI, 1, eadem A 1, positâ 9. perimetri erunt

282'7440

282'7440 & 282'7431, illa maior verâ, hæc autem verâ minor. quæ habentur multiplicatis perimetris supra stabilitis per 9, quemadmodum per 9 multiplicatum diameter. Siquidem proportionales esse debent diameter & circumferentia circuli. Semiperimeter ergo AQI maior verâ est 141'3720; verâ minor 141'3715. Ergo etiam eiusdem perimetri quarta pars maior vera erit 70'6860, minor verâ 70'6858.

Eadem methodo statuemus perimetrum circuli AKB, cuius diameter est AB 41. atque adeo semiperimetrum ac tandem quartam perimetri partem: quæ futura est huiusmodi 322'0140 maior verâ; at minor verâ 322'0128.

Atque hæc sunt lineæ siue rectæ siue circulares quas necesse fuerat definire hac Propositione. quas in vnum collectas exhibeo, vt hinc facilius peti queant.

VA } VK } EA } ET } AI } EV }	25	EK } VR } AH — AC — VO — EF — ID —	20 45' 205' 5 4. 3	Latus rect. --- 1 Quarta pars perimetri AQI 70'6860 maior 70'6858 minor Quarta pars perimetri AKB 322'0140 maior 322'0128 minor
--	----	--	-----------------------------------	---

PROP. XI. PROBL.

Ex nota linearum superiorum in numeris *Fig. 15.*
quanti

quantitate. Plana quædam in numeris nota exhibere.

Fig. 25. In primis occurrit triangulum A I M. ducatur A I 9 in I M 9, & producti 81 semissis 405' sumatur.

Secundò Trapezium I I E V K K notum fiet si C A 205' ducatur in E V 9. vt fiat 1845'. Nam eius area habetur si duo eius latera V K K 25 & E I I 16, simul addantur; factique numeri 41, semissis 205' ducatur in eius latus E V 9. At C A, vt patet, est semissis linearum A V, A E illis lateribus æqualium.

Tertiò. Rectangulum E L est 36. eius enim area fit latere E F 4 in latus E V 9 ducto.

Quartò noscenda est area portionis Parabolicæ F L O. Quam ita colligemus. Ad lineam V O 5, addatur tertia eius pars $1\frac{2}{3}$ vt fiat tota $6\frac{1}{3}$. per quam multiplicetur A V 25. Productus hic numerus $166\frac{2}{3}$, est area totius Parabolæ P A O: Est enim Parabola P A O sesquitertia trianguli P A O (ductæ concipiantur rectæ A P, A O.) per Prop. 24. lib... Archim. de Parab. Sed rectangulum, cuius vnum latus est A V altitudo trianguli P A O: alterum verò est trianguli eiusdem semibasis V O aucta sui tertiâ parte, est eiusdem trianguli sesquitertium. Ergo rectangulum & Parabola sunt æqualia, & quidem hoc numero $166\frac{2}{3}$ expressa. Eadem methodo habebitur Parabola S A F: semibasi scilicet E F 4 aucta sui parte tertiâ, & facto numero $5\frac{1}{3}$ ducto in A E 16, vt fiat $85\frac{1}{3}$ rectangulum æquale Parabolæ S A F.

Nunc



Quintò inuestigo aream semicirculi A Q I: ea habetur si diameter A I 9 ducatur in quartam partem perimetri superiùs stabilitam 70'6860 & 70'6858. fiet

H h enim

enim area totius circuli maior verâ 636'1740. & minor verâ 636'1722. cuius semis 318'0870. & 318'0861 erit area semicirculi A Q I tam verâ maior, quam minor verâ.

Sexto noscenda est area mixti Quadrilateri E K R V. Id autem vt obtineatur alia quædam prius determinari debent, ex quibus consequatur. qualis est area totius circuli, deinde sector C K R. Area quidem circuli obtinetur ducta diametro A B 41 in quartam partem perimetri 322'0140, vel 322'0128: eritque 13202'5740 & 13202'5248 illa maior, hæc minor verâ.

Sector autem C K R notus fiet, ex noto eius angulo K C R ad centrū circuli. Ita enim se habebit area totius circuli proxime inuenta ad aream sectoris; vt tota perimenter circuli ad arcū K R; siue vt quatuor anguli recti ad angulū K C R. Angulus ergo ille inquirendus est qui cum sit duplus anguli E K C trianguli E K C: cuius nota sunt omnia latera: notus euadet angulus ille, eritque præcise admodum, G. 12 M. 41. Si ergo duplicetur, vt fiat angulus, G. 25, M. 22. hic erit angulus K C R, siue arcus K R. Iam fiat vt totus circulus G, 360 siue M. 21600, ad arcum K R. G. 25. M. 22. siue M. 1522: ita area circuli paulò ante num. 6. inuenta ad 930'2924 vel

Fig. 25. 930'2890 sectorem vero maiorem, & minorem. Quod si ad hunc sectorem addatur rectangulum, quod fit ex E K 20, in E C 45' quod est, 90: fiet tandem area mixti Quadrilateri E K R V maior verâ 1830'2924, minor verâ 1830'2890. Est enim rectangulum C E K 90, æquale duobus triangulis C E K, C V R.

Hactenus

Haecenus inuestigata plana, simul omnia hac tabel-
la complector.

Trian. AIM—405'	318'0820
Trapez. EKK—1845'	Semic. AQI
Rectang. EL—36	318'0811
Parab. FLO— $4\frac{2}{3}$	
Eius duplum— $9\frac{1}{3}$	1830'2924
Planum EFOV— $40\frac{1}{3}$	Plan. EKR.V.
	1830'2890

PROP. XII. PROBL.

Solida numeris exhibere: quæ ex segmentis
Parabolicis AID, FLO: & FLPS, AIM in
se ductis generantur.

Hæc solida, ad calcem Propositionis 8 vocari iussi
A, B & C, D. Primum A & vltimum D, quæ æqua-
lia sunt, utpote ex æqualibus segmentis Parabolicis
AID, AIM in se ductis orta, facile noscuntur nam
ex dictis Prop. 6. corpora hæc æqualia sunt solido: cu-
ius basis est triangulum AIM 405', & altitudo Latus
rectum 1. Ducatur basis 405' in altitudinem 1 fiet soli-
dum 405 quæsitum tam A quam D.

Secundò. Solidum B (quod ex segmento FLO in
se ducto gignitur) ita notum fiet. Constat ex Prop. 6.
corpus ortum ex ductu Quadrilateri EFOV in se:
æquale esse solido, cuius basis sit Trapezium IIV, &
altitudo Latus rectum Trapezium autem ex Prop. an-
tecedente est 1845' Latus verò rectum est 1. Ergo soli-

Hh 2 dum

LIB. III. Examen triplicis Quadr. poster. 245
centur; fiet 144. Soliditas corporis illius parallele-
pipedu.

Deinde solidum ex rectangulo EL bis ducto in Pa-
rabolam FLO, habetur: si altitudo EF 4 ducatur in
duplum Parabolæ FLO, quod est $9\frac{1}{3}$, vt fiat $37\frac{1}{3}$.

Addatur hic numerus ad priorem 144, & inde col-
lectus $181\frac{1}{3}$, dematur ex $184\frac{1}{2}$ siue $184\frac{3}{6}$ (æquales
enim sunt adhærentes huic numero 184 fractiones) re-
manebit solidum B $3\frac{5}{6}$ ex segmento FLO in se du-
cto genitum: quod quærebatur.

Corpus denique C ex ductu plani FSPL in se ge-
nitum, eadem fere methodo notum euadet. Cum
enim planum hoc in duas partes diuidatur à linea EV:
erit per citatam Prop. 199. ductuum, solidum C quæsi-
tum, æquale solido ex ductu rectanguli EL in se, genito,
quod iam inuentum est 144. & solido ex ductu in se
segmenti EVPS. quod est $184\frac{1}{2}$. & denique solido,
quod fit bis ex rectangulo EL in Quadrilaterum
EVPS ducto. Hoc est, quod nascetur ex EF 4 bis
sumptâ, quæ est 8; in quadrilaterum EVPS siue
EFOV $40\frac{2}{3}$ ducta. qua multiplicatione producit
numerus $325\frac{1}{3}$. Tres ergo hi numeri 144. $184\frac{1}{2}$.
 $325\frac{1}{3}$ simul addantur colligetur numerus $653\frac{5}{6}$ ex-
primens solidum C ex segmento SFLP in se ducto
genitum.

Hæc demum solida in vnum collecta ita habent.

A —	$40\frac{2}{3}$	C —	$653\frac{5}{6}$
B —	$3\frac{5}{6}$	D —	$40\frac{1}{2}$

Hh 3 PROP.

PROP. XIII. PROBL.

Proportionem Rationum AB, & CD exhibere.

Reducantur in primis proximè expositi numeri, quibus fracti adhærent, ad vnicam omnes Denominationem iuxta leges fractorum. Sic stabunt Rationes. Sed

A —	$\frac{243}{6}$	C —	$\frac{3923}{6}$
B —	$\frac{19}{6}$	D —	$\frac{743}{6}$

quia numeri fracti, quorum idem est Denominator, eandem seruant Ratio-

nem inter se quam numeratores habere inter se, agnoscuntur. Expungatur communis ille Denominator 6 ab omnibus terminis; & eadem Rationes terminis simplicibus constantes, iterum hoc modo exhibeantur.

A —	243	C —	3923
B —	19	D —	243

Iam verò reducantur ad eundem Consequenter ambæ Rationes. Ad quod satis

est, vt soli Antecedentes reperiantur, qui communi Consequenti debentur; licet ipse Consequens communis omittatur. Ipsi enim soli duo Antecedentes ad inuicem collati datarum Rationum proportionem expriment, vt ostensum est lib. 1. Prop. 7. Reducuntur autem ad eundem Consequentem Rationes duæ superiores in hoc casu, in quo Consequens posterioris, æqualis est prioris Rationis Antecedenti: si B 19 ducatur in C 3923, vt fiat 74537. qui diuidatur per A 243, vt fiat

fiat quotiens $3067\frac{1}{36}$ (vtor decadicis vt præcisior habeatur quotiens, faciliusque exprimatur fractio post diuisionem reliqua.) Dico terminum A 243 tanquam Antecedentem, ad quotiētem proximè inuentum $3067\frac{1}{36}$ tanquam ad Consequentem, collatum, exprimere proportionem duarum Rationum AB & CD. Cuius terminos characteribus K, & L designari monui Propof. 9. huius ad calcem.

Hac autem arte, quam hic adhibui, rectè inueniri terminos proportionis inter duas Rationes AB, & CD intercedentis, sic ostendo. Cum primus terminus A & vltimus D ponantur æquales, & in se mutuo duci debeant, vt reperiatur Consequens communis duabus Rationibus AB, & CD. Fiet ex ea multiplicatione numerus Quadratus primi termini A. qui futurus esset Antecedens proportionis quæsitæ, cuius Consequens, foret numerus ex multiplicatione B in C progenitus. Quod si huiusmodi termini proportionis per eundem numerum diuidantur; alij habebuntur termini eiusdem proportionis. Numeri enim duo vel plures, sicut, si per eundem numerum multiplicentur, numeros producant eiusdem cum ipsis Rationis. Ita eiusdem cum ipsis Rationis numeros producent, si per eundem numerum diuidantur. Quare si Quadratus numerus termini A, & productus ex multiplicatione termini B in C, diuidantur per eundem terminum A. Quotientes ita erunt inter se vt numeri diuisi. Est autem A quotiens, si eius Quadratum per A diuidatur. Ergo A ita se habet ad quotientem diuisionis numeri ex B in C producti,

ducti, cum idem per A diuiditur : ac se habet Quadratus radice A ad productum numerum ex B in C. Sed Quadratus radice A, & productus ex B in C expriment proportionem Rationum A B, C D. Ergo eandem etiam expriment ipse numerus A, & quotiens factus ex diuisione producti ex B in C per eundem numerum A. Hæc ergo esto datarum Rationum A B, C D quæ sita proportio. K 243 Antecedens, L 3067³⁶ Consequens : vel terminis ad eandem Denominationem reductis (terminus enim L fractus est, & more decadicorum designatus) & deinde Denominatione extincta multiplicato K 243 per 1000. Sic stabit in integris quæ sita proportio.

K 243000	vel in	K—30375
L 306736	minimis	L—38342

PROP. XIV. PROBL.

Fig. 25. Cognoscenda sint in numeris solida, quæ ex segmentis Parabolicis A I D, F L O : & FLPS, A I M in se subalterne ductis oriuntur.

Quod Prop. 12. præstitum est circa eadem Plana in se directe ducta : idem nunc absoluendum est quando in se subalterne ducuntur.

Primo ergo loco. primum & vltimum solidum ex æqualibus segmentis Parabolicis A I D, A I M genita (quæ E & H vocæda veniunt ex Prop. 9.) nota fiunt,) si
Latus

verâ 1830'2924. At minor verâ 1830'2896: dematur solidum quod fit ex Rectangulo EL in se ducto, & quod fit ex ductu eiusdem Rectanguli EL bis in planum FLO. Hæc autem solida duo simul iam supra Prop. 12. inuenta sunt 181 $\frac{1}{2}$. vel, reductâ hac fractione $\frac{1}{2}$ ad decimas, ad eandem scilicet denominationem cum numero, unde fieri subtractio debet, 1813'3333 facta verò huius numeri subtractione ex illo vel maiore vero vel minore: remanebit solidum F vel maius vero 16'9591, vel vero minus 16'9563.

Fig. 25. Hic in mentem fortasse veniret dubitandi, ne ductuum diuersitas, quæ in hac Propositione & Propositione 12 citatæ obseruatur; cum hic ductus subalternus, illic verò simplex adhibeatur: aliquid etiam diuersitatis inuehat in Applicationem Propositionis 4. lib. 2. Eucl. quam Geometra demonstrat Prop. 199. ductuum vt supra Prop. 12. retuli. Verum nihil discriminis in hoc casu obseruari potest nisi in solo situ solidorum duorum, quæ complementorum locum referunt Propositionis illius Euclidis citatæ. Semel enim Rectangulum EL duci debet in planum FLO, semel item in planum LFG, priori quidem obuersum sed ei æquale; vt vnâ cum solido ex FLO in se subalterne, hoc est, in obuersum planum LFG ducto, componatur totum solidum ex toto Plano EFOV in se subalterne ducto formatum. Ita vt tota diuersitas quantitatis solidorum duorum, quæ generat planum EFOV, dum in se directe, & in se subalterne ducitur, sumi debeat penes particulam FLO: licet quoad situm discrimen etiam reperiatur

fiet solidum 144. suprà Prop. 12. iam inuentum:
 si rursus idem rectangulum EL ducatur bis in
 planum EFOV. 40. $\frac{2}{3}$ ex Prop. 11. id est, si EF 4. bis
 siue 8, ducatur in 40 $\frac{2}{3}$ vt fiat 325 $\frac{1}{3}$. Si deinde ad-
 dantur hi duo numeri 144 & 325 $\frac{1}{3}$ vt fiat 469 $\frac{1}{3}$. Si
 denique hic numerus addatur ad solidum, quod fit ex
 ductu subalterno plani EFOV quod per Prop. 5. æqua-
 le est solido, cuius basis est planum EKR V, altitudo
 verò Latus rectum Parabolarum: habebitur solidum
 quæsitum ex illis partialibus compositum: Postremum
 verò hoc solidum, cum altitudo eius sit Latus rectum 1,
 erit ipsa basis EKR V suprà definita Prop. 11. vera ma-
 maior 1830'2924 & verà minor 1830'2896 immutata,
 huic ergo numero addatur numerus 469 $\frac{1}{3}$ siue reda-
 cta fractione $\frac{1}{3}$, ad decimas 4693'333. fiet per hanc
 additionem 6523'6257 vel 6523'6229 solidum quæsi-
 tum, illud maius vero, hoc autem minus.

Quatuor ergo solida illa, tota hac Propositione in-
 uestigata, ex ductibus subalternis orta hac synopsi ex-
 ponantur.

E	$\left\{ \begin{array}{l} 318'0870 \text{ mai.} \\ 318'0861 \text{ min.} \end{array} \right.$	G	$\left\{ \begin{array}{l} 6523'6257 \text{ mai.} \\ 6523'6229 \text{ min.} \end{array} \right.$
F	$\left\{ \begin{array}{l} 16'9591 \text{ mai.} \\ 16'9563 \text{ min.} \end{array} \right.$	H	$\left\{ \begin{array}{l} 318'0870 \text{ mai.} \\ 318'0861 \text{ min.} \end{array} \right.$

PROP.

Inuestigetur Proportio Rationum quæ inter solida E, F; & G, H. proxime Inuenta, intercedit.

Hactenus solida illa quatuor, inter quorum Rationes Proportio hic proponitur inuestiganda: duobus semper numeris expressi, maiore vero, & vero minore, prout constituta est area circulorum, è quibus pendent hæc solida; maior verâ, vel minor verâ. Quod quo consilio à me factum fuerit, infra patebit: illud interim etiamnum obseruo: & prius inquiero proportionem, quæ est inter Rationes horum solidorum, cum veris maiora supponuntur; tum deinceps eadem proportio inquireretur solidis iisdem minoribus veris, suppositis. Repetantur ergo termini veris maiores, vt habet hoc schema: in quo expungitur fractio omnium,

E—3180870	G—65236257	delecto accentu
F—169591	H—3180870	quia idem est in
		omnibus fractio-
		nis Denominator:

vnde fit, vt sæpius dictum est, vt ipsi numeratores inter se eandem obseruent Rationem quam ipsi fracti inter se prius obseruabant. Quæraturn itaque Consequens vtrique Rationi E F, G H communis, vel potius vt aliàs monui, quærantur soli Antecedentes E & G, qui Consequenti communi debentur, licet ipse omitatur. Erunt hi duo Antecedentes, E quidem idem; nempe 3180870 si methodus vsurpata & demonstrata ad Prop. 13. adhibeatur. At G erit 3478131. Qui termini

li 3 Propor

Proportionem exponunt, quæ est inter Rationem E F, & Rationem G H. quique designari debent ex præscripto Propositionis 9. characteribus M & N. Atque ea est Proportio, quæ oritur ex terminis verò maioribus

Fig. 25. assumptis. Quod si verò minores assumantur, haud aliter proportio reperietur: sint enim termini verò minores suprâ exhibiti vt habet hoc schema. Et F ducatur in G, productusque diuidatur per E vt fiat quo-

E-3180861	G 65236229	tiens 3477565 lo-
F- 169563	H 3180861	co Antecedentis G
		ad quem velut ad
		Consequentem re-

feratur Antecedens E. Expriment hi numeri, qui M & N dici debent, Proportionem inter Rationes solidorum E, F & G, H. positis terminis verò minoribus. En iam schema in quo vtraque Proportio exhibetur, vt

M- 3180870	Ex terminis	M- 3180861	Ex vero
N- 3478131	vero maio-	N 3477565	minori-
	ribus		bus

earum discrimen, dum simul ambæ opponuntur, clariùs elucescat. Nec dum tamen satis apertè dignoscetur, donec vterque Antecedens M in alium mutetur, cui communis Consequens congruat: hoc est, donec termini reperiantur Proportionalitatis, duplicis huius Proportionis M N, M N. qui habebuntur primo termino M ducto in quartum N, vt fiat Antecedens: & ducto secundo termino N in tertium M, vt fiat Consequens sunt autem huiusmodi, quales hic adscribo.

Ex

Antec.	11061682181550	Ex quibus patet minorem esse rationem ex terminis verò maioribus ortum, ratione
Conseq.	11063451250791	

ne orta ex terminis verò minoribus. Vera ergo ratio ex terminis veris profecta inter hanc utrâque interiaceret. Quod maximè obseruatum velim. Atque hæcenus exposui Proportionem quæ hic quærebatur.

PROP. XVI. THEOR.

Respuit Geometria, coniunctissimæ suæ sororis Arithmetices apertissimis argumentis persuasa clarissimi Alumni sui nouam Circuli Quadraturam.

Demonstratio.

Hic in primis consulatur Propositio mea 8. in qua retuli Propositionem 77. lib. 10. Geometræ in qua supponit probatum euidenter per Propositionem suam 62. (hæc est propositio mea 7.) esse eandem Proportionem inter Rationes AB & CD: quæ est inter Rationes EF & GH. Quas Proportiones voco KL & MN. id est, eandem esse proportionalitatem PQ. (hic consuli omnino debet Propositio 9. vt horum characterum, quibus breuitatis & lucis gratia vt cogor, memoria refricetur) inter has duas Proportiones, atque adeo Proportionalitatis huius terminos Antecedentem P & consequentem Q æquales esse. Istud porrò an verum sit; tabulæ, quas hæcenus parauimus, prolatae

latae apertum facient. Exhibeantur igitur. Ac primum producat^{ur} Proportio K L quam Prop. 13. numeris accuratissimis expressi huiusmodi. K-30375. L 38342. Afferatur deinde in medium Proportio MN quæ duobus diuersis terminis exprimitur, prout veris maiores vel minores assumi possunt. Nunc primum proponantur veris maiores. M est 3180870. & N 3478131. Componatur in vnum schema ambæ Proportiones hoc modo.

K--30375	M-3180870	Si ergo hæ duæ Proportiones siue Rationum A B, C D
L--38342	N-3478131	

& E F, G H Rationes, sunt æquales: Idem debet esse vtriusque Proportionis Denominator vel, quod eodem redit; cum æquales ponantur proportionibus K L & M N. Proportionales debent esse earum termini. Atque adeò per Prop. 19. lib. 7. Eucl. Idem numerus fieri debet, si ducatur K primus, in quartum N; qui fit ducto L secundo in M tertium. Ineatur huiusmodi multiplicatio: vt habeantur termini P, Q Proportionalitatis. Hi sunt quos refert hoc schema.

P—105648229125	Ecce quanta inter eos inæ- qualitas sese offert: Ex qua, inæqualitas duarum propor- tionum propositarum cui-
Q—121960917540	

dentissimè concluditur.

Quod si terminos veris minores in medium adducamus, vix minor sese prodet dissimilitudo, siue inæqualitas proportionum earundem K L, & M N. Componantur ambæ in hoc schemate.

Debet

Debet ergo	
K--30375	M--3180861
L--38342	N--3477565
idem numerus produci ex mul- tiplicatione mu- tua terminorum K, N, & terminorum L, M, vt ante ostendi. hoc est, termini Proportionalitatis P & Q, æquales esse debent. Sunt autem huiusmodi.	

Cum ergo tanta inæqua-
litas obseruetur inter termi-
nos P & Q Proportionalitatis
Proportionum K L, & M N,
siue sumantur termini Proportionis M, N veris maio-
res, aut veris minores (termini enim K, L prioris Pro-
portionis veri ipsi sunt, & accuratissimi.) Quis Geo-
metriæ alumnus non in dubium reuocet Propositio-
nem illam 62. sæpiùs citatam: quâ asseruntur Propor-
tiones K L & M N, Rationum A B, C D: & Rationum
E F, G H, æquales esse: atque adeò iure non agnoscat
tanquam absolutam Quadraturam nouam, quæ tota
huic Propositioni nititur.

Atque istud solum è Logistica deductum ratioci-
nium, nouum hunc circuli Quadrandi modum omni
vitio omninò non carere satis euidenter ostendit. Ve-
rumtamen cum istud vnum sit totius huius discussio-
nis caput, licet satis fusè singula exposita fuerint, ita
vt non numeros modò ex calculo deductos: sed ipsam
etiam totius putationis seriem exhibuerim; vt, si lu-
beat, totus ipse calculus à Logista non omnino rudi
leuissimà operâ possit iniri & probari: in eo exponen-

K k do

do paulò diutiùs immorandum videtur: ac in primis difficultati cuidam prima specie satis graui occurrendum: ea est huiusmodi.

Obiiciet non nemo mirum videri non debere, si inæqualitas aliqua deprehendatur in numeris superioribus proportionibus KL, MN exponentibus: ac proinde eas inæquales esse indicantibus. Cum enim Rationes EF, GH corporum ex ductu subalterno productorum, atque adeo earum Rationum proportio MN ; non nisi ex circuli perimetro eiusque area: quas veris ac præcisis numeris exprimi nondum contigit; exprimantur, vt ex Propositionibus 14. 15. & 16 constat. Cum, vt ibidem videre est, sinuum numeri, qui omnino præcisi esse nequeunt, adhibeantur ad harum Rationum inuestigationem, ac determinationem: quæ fieri potest, vt ipsa proportionalitas, P, Q duarum proportionum KL , & MN habitudinem exponens, æqualibus numeris constet, qui æquales proportionibus illas KL, MN demonstrent; licet reuera æquales Geometricæ ipsæ sint: Imò inæquales esse huiusmodi terminos P & Q proportionalitatis necesse est. Nam proportio KL , quæ ad Rationes AB, CD corporum ex ductu simplici genitorum pertinet: veris accuratissimè terminis constat. Contra verò proportio MN ex terminis non omnino veris sed ad veros proximè tantum accedentibus, vt paulò ante dictum est, proficiscitur: discrimen ergo aliquod induci necesse est in numeros P, Q proportionalitatis; quamuis, si terminis exprimatur continuæ quantitatis, absolutissima sese prodatur æqualitas.

Ad

Ad hanc difficultatem respondetur, diffitendum omninò non esse inæqualitatem quandam in terminos P, Q Proportionalitatis, inuehi ex terminis non omninò præcisè suppositis, vnde ipsa constituitur: id enim euidenter probat allatum argumentum. Ea tamen admittenda non est inæqualitas, quam in terminis Proportionalitatis P Q obseruare licet. Hæc enim nullo modo referri potest ad numeros, qui non veri sed veris tantum proximi supponuntur initio: cum in ipsis primis figuris numerorum P & Q sese prodant: ad quas pertingere non potest tantilla à vero discrepantia in extremis ipsis tantorum numerorum figuris supposita, quæque etiam in ipsis vnitatem integram adæquare non possit; quamuis vnitas vt Prop. 10. monui, minor sit parte ter centies millesimâ positorum numerorum: nec verò in decursu calculi tot occurrunt ineundæ operationes, quæ particulam illam ita multiplicent, vt numeros peruadere possit immensos, nec paucioribus quàm duodecim figuris constantes; & mutationem siue inæqualitatem gignere in primis ipsis eorum figuris: Quod vestigia relegendo totius putationis declarari facilius potest, quam breuius: ita vt huic operæ minimè necessariæ supersedeam. certòque statuam inæquales omnino esse Proportiones ipsas KL, MN, vt arguit earum Proportionalitas P Q terminis constans inæqualibus ab ipsis primis eorum figuris, quarum utpote summi valoris, maxima habenda est Ratio: Esto in posteriores figuras, quæ, vt minimæ quantitatis, ad priores collatæ, contemni & omitti

K k 2

possent:

possent: aliqua inæqualitas consequi possit ex discrimine numerorum à veris, supposito.

Hanc responsionem, latamque sententiam in circuli nouam hanc Quadraturam, apertissimè confirmat initus à me calculus superior; initus si quidem de industria, ita est; vt duplicem semper operationem instituerim, quarum altera ad perimetrum circuli verâ maiorem, altera ad verâ minorem spectaret: itavt certum sit verum ipsum terminum inter vtrumque versari. Cum igitur tandem necessarias putationes eò adduxi, vt stabilita sit vtraque Proportionalitas PQ , tum quæ ex termino maiore, tum quæ ex minore, vero, deducitur: necessarium est vt alterutro Consequente Q Proportionalitatis, constituto (cuius vtriusque Consequentis Q figuræ primæ ad sextum vsque sunt æquales) ipse verus Antecedens, si haberi contingeret; inter vtrumque hunc Antecedentem 105648, &c. Qui ex termino maiore, & 105631, &c. Qui ex termino minore collectus est; contineatur: Et quia quatuor priores figuræ vtriusque huius Antecedentis sunt æquales; etiam his æquales forent saltem quatuor priores figuræ veri Antecedentis: Atque adeò eædem inæquales forent quatuor primis figuris Consequentis Q . quemadmodum illis sunt inæquales quatuor figuræ duplicis huius Antecedentis: Esto reliquarum insequentium tanquam minimi momenti nulla haberetur ratio siue æquales fuerint siue inæquales.

Ad extremum vt sole clariùs pateat hanc inæqualitatem terminorum P & Q Proportionalitatis non ex
numeris

numeris à verò alienis, suppositis oriri, sed ad inæqualitatem ipsarum proportionum KL & MN acceptam referri debere: attendantur tum Antecedentes duo, tum duo Consequentes proportionalitatis vtriusque PQ . Nunquid non æquales sunt duo Antecedentes P ad quartam vsque numerorum figuram: duo verò Consequentes Q , etiam ad sextam, æqualitatem retinent? & tamen vterque Antecedens, & Consequens vterque ortum habet à duplici circuli perimetro supposita, quarum vna maior est verâ, altera minor. Cur ergo termini vtriusque Proportionalitatis PQ , qui æquales esse deberent, positis æqualibus proportionibus KL, MN , inæquales sunt, si tota eorum inæqualitas ex eodem fonte emanaret: ex quo derivatur tota diuersitas duorum Antecedentium inter se, sicut & duorum Consequentium: qui licet aliquam inæqualitatem patiantur; ea tamen exigua est, & minimi momenti, & ad primas figuras terminorum minimè pertingens; sed extremas tantùm occupans: Et ea sanè tota est, quam generant termini perimetrorum verò maiores, veròque minores suppositi: quam etiam obseruare vtriusque proportionalitatis Antecedentem & Consequentem fatendum foret, si ea solùm radix foret discriminis intercedentis inter eos. Sed aliunde, cum tam diuersum sit, illud emanare constat, ex diuersis scilicet proportionibus Rationum AB, CD ; & EF, GH . Vt hætenus inita putatio demonstrauit. Et in posterum demonstratura est euidentius: neque enim par est tanti momenti caput vnico examini (licet vni-

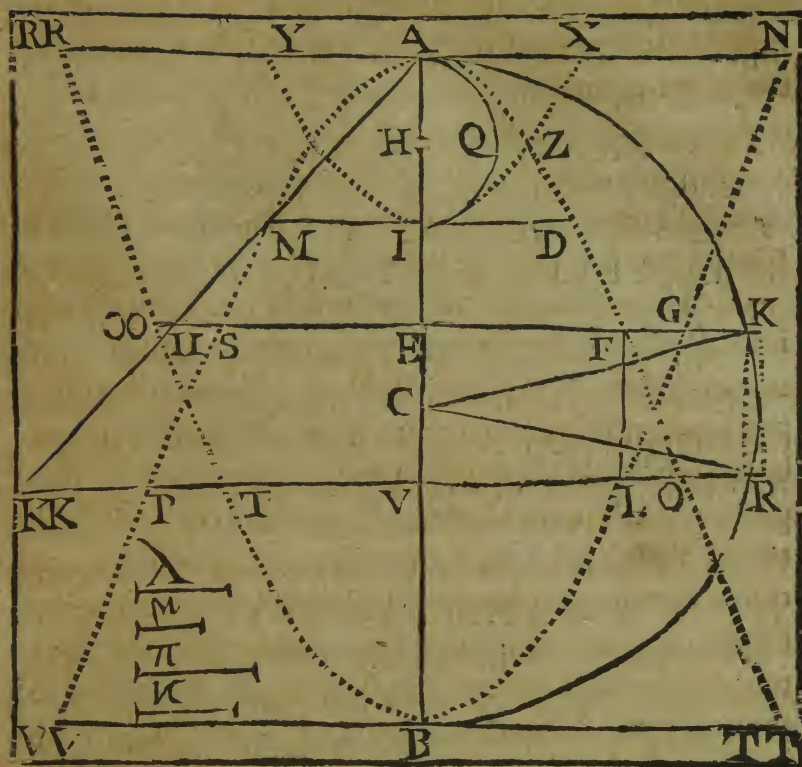
Kk 3 cum

cum sufficiat) subiecisse. Sed accedat necesse est, aliquot præterea casuum similium testimonium; ut eorum consensus, latae sententiae æquitatem apud omnes testatorem præster.

PROP. XVII. THEOR.

Sententiae Propositione Antecedenti latae confirmatio.

Fig. 25. Confirmatio hæc, viâ per quam multiplici posset iniri. Posset eadem retentâ quantitate linearum systematis, AV 25. AE 16, &c. Ut Prop. antecedenti assumptæ sunt, mutari latus rectum, & sic aliæ & aliæ parabolæ possent delineari, quarum communis axis semper foret AB iuxta Coroll. 1. Propos. 6. Possent item lineæ AV, AE, AI his numeris 25, 16, 9 definitæ, per quemcumque numerum multiplicari; & ita dictorum numerorum loco, eorum summi æquemultiplices: retento tamen eodem latere recto; quod ante assumebatur, nempe vnitatem. Posset etiam in hoc ipso casu mutari latus rectum. Quod si omnibus his diuersis initis viis (quarum plurimas, ut mihi constaret veritas, quàm tanti Geometrae autoritas sola mihi faciebat dubiam) eò semper deueniatur; ut proportionales Rationum superiorum AB, CD: & EF, GH; inæqualitatem aliquam subeant, id est; termini Proportionalitatis earum, qui sunt P & Q, inæquales tandem absolutis operationibus sese prodant: de earum inæqualitate, quæ Quadraturam nouam funditus concutit, iure nemo possit dubitare. Omitto tamen omnes hinc petitas assertio



assertionis meæ confirmationes, vt aliam afferam, quæ & lucis plurimum calculo præcedenti affundet: & veritatem è tenebris, si necdum satis discussæ sunt, sole clariorem educet contemplandam.

Dum varias in eo numerorum rationes, frequens & constans me docuit experientia, Proportionum, de quibus tota est quæstio, inæqualitatem siue dissimilitudinem eò maiorem semper se prodere cæteris paribus, quo longior axis AB Parabolæ statuitur, quòve (quod inde consequitur) ordinatim Applicatæ

EF,

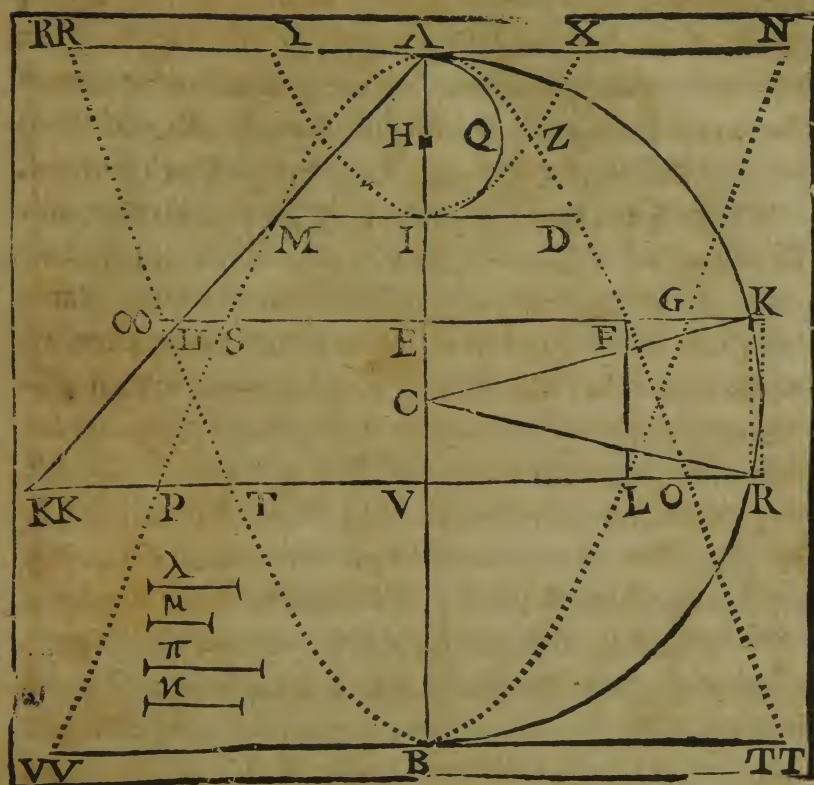
Fig. 25.

EF, VO medium spatium semper occupantes, à verticibus A & B longius recedunt. Statui igitur easdem assumere paulò remotiùs, tantum enim abest, ut inde calculus euadat molestior, ut longe facilior & tutior existat. A lineis iuxta methodum superiorem, ad Plana; hinc ad solida progrediamur eodem seruatò systemate.

Fig. 25.

Primo ergo loco statuo Latus rectum esse 1. tum ordinatam EF esse 30, alteram verò VO 303' (volo enim eas tertiâ parte sine fractione constare, ad Parabolæ aream faciliùs obtinendam) ita ut excessus posterioris supra priorem sit tantum $\frac{1}{10}$: quem numerum exprimit decadice hic terminus 3'. Ex his ita suppositis; erunt AV 91809, AE 900, illa enim est Quadratus numerus radicis VO; hæc verò radicis EF, ut præcedenti Prop. expositum est. Ergo EV, cui æqualis ponitur AI, est 1809 excessus nimirum lineæ AV supra AE. Deinde linea EK, cum sit media proportionalis inter BE siue AV & AE, erit 909 est enim rationalis & rationali radice constat; nam Quadratus numerus AV, Quadratum numerum AE multiplicans Quadratum EK producit per 1. lib. 9. Eucl. Denique linea circularis siue Perimeter tota circuli AQI erit 568315440 maior verâ (eam unicam breuitatis causa nunc adhibeo) deducta ex ratione diametri 1, ad perimetrum 314160, iuxta calculum præcisiorem à Peritis Geometris initum. Ergo octaua illius perimetri pars, qua sola egebo, est 71039430. Quoad verò Perimetrum circuli AKB maioris, hic est minime necessaria, ut infra constabit. Ita ergo habet linearum quantitas in systemate contentarum.

Secundò



VA	} 9180'9	EK 909	Latus recti.
VKK		EC 90'45	Octaua pars
EA	} 900	CA 90'945	Perimetri cir-
EII		EF 30	culi A QI
AI	} 180'9	VO 303'	71'03943
EV			

Secundò , ex his Plana eruenda sunt. Et primò
 triangulum AIM ex linea AI 180'9, in semissem IM
LI vel

Fig.

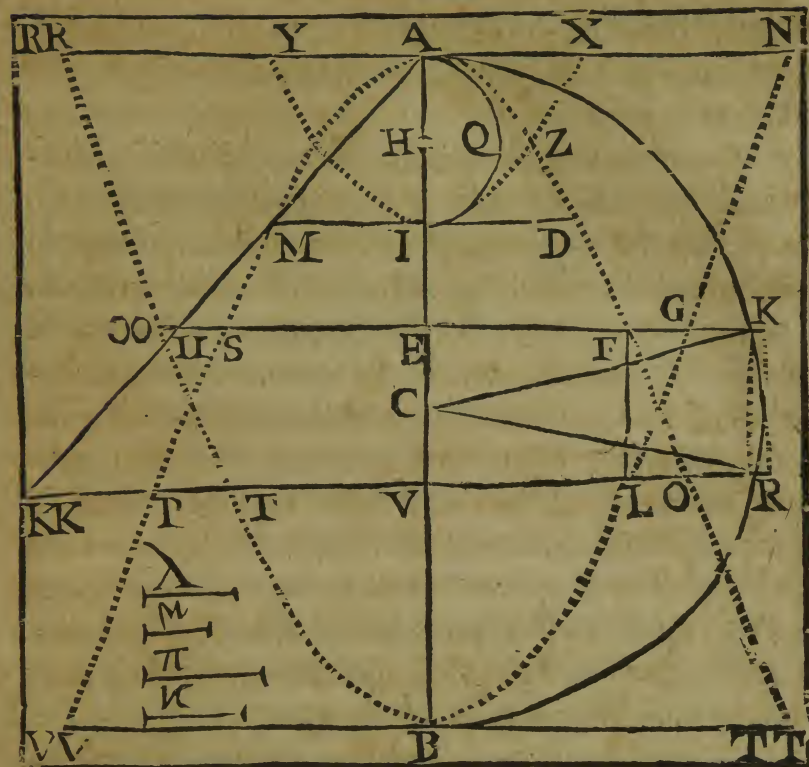
vel $AI\ 90'45''$ ductâ genitum, est $1636'24''$. Trapezium deinde $II\ EVKK$ ex lineâ CA in EV ductâ ortum, ut supra Prop. II. num. 2. expositum est, erit $164446'2405''$.

Fig. 25.

Quaratur iam Parabolica portio $SFO\ T$, eiusque Partes. Parabola tota PAO producitur ex VO , $303'$ aucta sui parte tertia, id est ex $404'$ in $VA\ 9180'9''$ multiplicata. Ergo est $370908'36''$. Parabola autem SAF , erit 36000 nam is numerus producitur ex EF auctâ sui parte tertiâ, hoc est, ex 40 in $EA\ 900$. Si igitur ex Parabola PAO nota, dematur nota Parabola SAF , notum utique fiet planum mixtum $SFO\ P$: eritque $10908'36''$. A quo si dematur rectangulum SL , productum ex multiplicatione lateris SF , quod est 60 , in latus ST , $180'9''$; & est $10854'$: reliquum fiet planum $54'36''$ æquale duabus portionibus STP , $FL\ O$ siue duplum alterutrius; ipsâque adeò alterutra portio nota euadet; eritque $27'18''$.

Fig. 25.

Noscendum deinde est planum mixtum Quadrilaterum $E\ K\ R\ V$. cui operæ non satis tutò inseruiet methodus præcedenti Prop. assumpta eò quod angulus $K\ C\ R$ sectoris euadat acutissimus; quales anguli minus exactè per sinus solent obtineri. Hac ergo ratione breuiori tutiorique planum illud poterit definiri. Inueniatur area rectanguli, quod fit ex latere EV in latus $E\ K$ multiplicato: quæ latera cum nota facta sint; notum exhibebunt rectangulum illud, eiusque quantitas, hæc erit, $164438'1''$. Quod si à rectangulo genito à latere CA & latere EV , quod paulò ante definitum est



est 164446'2405, dematur huiusmodi rectangulum
 VEK: remanebit excessus vnus supra alterum 8'1405.
 Certum autem est excessum, quo mixtum planum
 EKR V superat Rectangulum VEK paulo maius esse
 semisse huius numeri 8'1405. Nam ducta rectâ
 KR, segmentum Circuli ab eadem abscissum paulò
 maius est, quam triangulum Isosceles supra basim KR
 excitatum intra idem segmentum, segmentum enim
 triangulum hoc modo sibi inscriptum superat quanti-
 tate duorum minorum segmentorum ab vtroque
 Ll 2 trianguli

Fig. 25.

trianguli latere abscissorum. At triangulum est dimidia pars excessus rectanguli sub CA & EV, siue circumscripti plano mixto E K R V, supra rectangulum VEK, quod eidem plano mixto inscribitur. Cum igitur excessus illius 8'1405 rectanguli circumscripti supra inscriptum dimidia pars, sit 4'0702, quantitatem trianguli segmento KR inscripti exprimens: si quid plus augeatur, hoc modo, 4'1, posita scilicet unitate loco illius O, primam figuram 4 proximè insequentis; cum tertia figura 7 prope absit à 10; vix aberrabitur à vera quantitate plani mixti: quod ex his suppositis, erit 164442'2. Tantum igitur esto Planum illud mixtum E K R V.

g. 25. Denique area semicirculi A Q I erit 1285'10328870. quæ fit ducta diametro AI 180'9 in octauam partem perimetri totius circuli A Q I: Quæ pars octaua superior definita fuit 71'03943. Atque hæc sunt Plana omnia, ex quibus mox solida eruenda sunt postquam huiusmodi Plana unū sub aspectū exposuero hoc modo.

Triang. AIM—	1636'24	Semicirculus
Trapez. EKK—	164446'24	A Q I
Rectang. EL—	5427'	1285'10
Dupla portio FLO—	54'36	Planum E K R V
Planum EFOV--	5454'18	164442'2
Eius duplum—	10908'36	

Tertiò denique corpora, quorum Rationes penduntur, definienda sunt.

Primum

Primum est corpus A ortum ex segmento AID in se ducto. quod æquale est Prismati, cuius basis est triangulum AIM, & altitudo Latus rectum, quod cum sit vnitas. ipsum solidum A, erit ipsum triangulum AIM 1636'24.

Secundum est solidum B, ortum ex segmento FLO *Fig. 25.* in se ducto. Quod ita notum euadet. Ad duplum portionis FLO 54'36 addatur rectangulum EL 5427', vt fiat ex ea additione 5481'36, hic numerus ducatur in EF 30. fiet 164440'80. qui si dematur ex Trapezio EKK, reliquum fiet quæsitum solidum B 5'4405. huius praxis ratio supra declarata fuit in simili casu præcedentis Propositionis: hic tamen compendiosius absoluta, iunctum scilicet est rectangulum EL cum duplo plani FLO: & facta hinc area ducta est in altitudinem EF; cum illic sigillatim rectangulum EL in se duceretur, & deinde idem duceretur in duplum planum FLO. Sed per Prop. 1. lib. 2. Eucl. idem gignitur utroque operandi modo.

Tertium solidum est C ortum ex plano SFOT in *Fig. 25.* se ducto. Illud colligemus, si ad planum SFOP 10908'36 addatur rectangulum EL 5427', vt fiat 16335'36. Hic verò ducatur in EF 30, vt fiat 490060'80: qui ad Trapezium EKK 164446'24 additus dabit quæsitum solidum C 654507'04. Ratio huiusmodi solidum C inueniendi, clara est ex Prop. 12. Huius. In qua est huiusmodi corpus C definitum, ibi enim ostensum est corpus C ex plano SFOT in se ducto genitum, æquale esse corpori, quod tribus solidis constat, nimirum ei

LI 3, quod

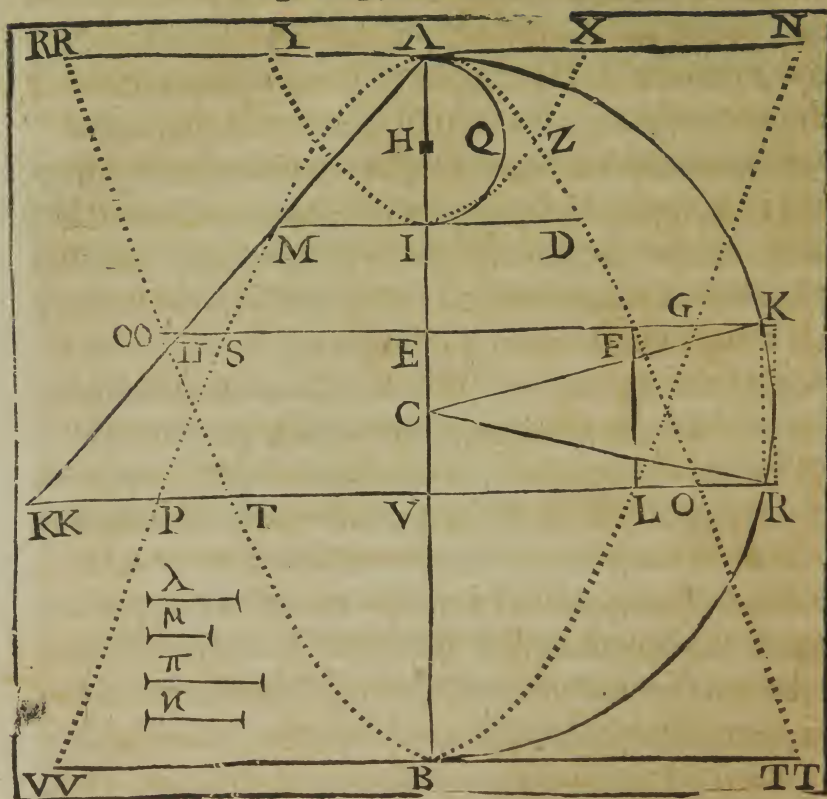


Fig. 25. quod fit ex plano EFOV in se (quod est æquale Prisma-
mati, cuius altitudo est latus rectum, basis verò Tra-
pezium EKK siue rectangulum ei æquale sub VE,
& CA vel CK ex Prop. 11. num. 2.) item ei quod fit ex
rectangulo SV vel EL in se; ac denique ei quod fit ex
rectangulo EL ducto in planum EFOV bis hoc est,
in planum SFOP: Sed si addatur rectangulum EL ad
illud planum SFOP. Et hinc collectus numerus, qui
basis est solidi, ducatur in altitudinem EL. per appli-
cationem Propositionis 1. lib. 2. Eucl. ad ductus, idem
gigni

gigni debet numerus, ac gigneretur si singulæ partes, rectangulum scilicet EL , & planum $SFO P$, separatim ducerentur in EL , productique partiales numeri adderentur. Si ergo hoc vtrouis modo genitus numerus addatur ad solidum ex $EFOV$ in se ducto ortum; quod in nostro casu, in quo latus rectum siue altitudo est vnitas, est ipsa basis immutata, rectangulum scilicet sub VE, CA : habebitur solidum C . Qua eadem praxi paulò post venabimur solidum G .

Quartum & vltimum solidum D . ex ductu simplici siue directo genitum, est æquale primo A . in nostro casu.

Primum corpus ex ductu sub alterno genitum est *Fig. 25.* E , quod oritur ex segmento parabolico AID in se subalterne ducto, & est æquale semicylindro, cuius basis est semicirculus AQI & altitudo latus rectum parabolæ, vt suprà Prop. 5. Huius. Declaratum est, solidum ergo illud in nostro casu, in quo latus rectum ponitur vnitas, est ipsa area semicirculi AQI suprà hoc numero definita $128\frac{5}{10}$ vel $128\frac{5}{1}$ figurâ O inutili expunctâ.

Secundum corpus F ex plano $FL O$ in se subalterne ducto profectum, notum euadet: si numerus $16444-0'80$ ad solidum B inueniendum paulò ante constitutus, dematur ex plano mixto $EKR V$, quod est $16444-2'2$, vt reliquus fiat $1'4$, solidum F quæsitum exprimens.

Tertium solidum G , quod ductus subalternus in se plani $SFO T$ producit, habebitur si numerus $4900-60'80$ ad solidum C inueniendum adhibitus, addatur
ad

ad planum EKR V $1644\frac{1}{2}$ vt fiat 654503'0. Hic enim numerus solidum G exprimit; vt in quærendo solidum C præmonui.

Quantum solidum H, primò E æquale est. Iam inuenta solida componamus in ordinem aptum ad eorum Proportiones definiendas. Ita ergo habebunt prima specie.

A 1636'24	C 654507'04	E 1285'1	G 654503'0
B--- 5'44	D--- 1636'24	F--- 1'4	H--- 1285'1

Quod si ad minimos terminos reducantur A,B,C,D (reliqua E,F,G,H, iam stant in minimis) & fractio, ab utrisque expungatur, cum idem sit eius Denominator, sic statuentur eadem solida.

A 20453	C 8181338	E 12851	G 6545030
B--- 68	D--- 20453	F--- 14	H--- 12851

Inuenta quantitate solidorū singulorum, inquiri debet Proportio Rationum quas inter se obseruant: & primò quidem Rationū AB & CD ad solida ex ductu simplici in se genita pertinentium. Hæc Proportio, si methodus in antecedenti exemplo adhibita obseruetur, ea futura est: quam hi termini K & L ad eam exprimendam designati exhibent. At verò Proportio inter

K—20453	M—12851	Rationes solidorum E, F & GH, quæ characteribus M & N designari solet; ea est, quam refert schema appositum.
L—27201	N— 7130	

Nunc

Nunc demum inquiratur an similes sint, siue, quod idem est, æquales, huiusmodi Proportiones K L, M N. id est, earum denominatores siue quantitates inuestigantur methodo in superiori casu Prop. 15. ex Prop. 9. lib. I. huius allatâ : quam vt hic etiam obiter indicem, fiat decussata terminorum proximo schemate positorum multiplicatio, K in N, & M in L. Si enim, vt vult Geometra noster, Proportiones illæ sint æquales, æquales esse necesse est earum Denominatores P & Q eâ multiplicatione productos. En illos ipsos, quos hoc

P —	145829890	schema refert. An æqua-
Q —	347760051	les numeri cuiuspiam vide-
		ri possunt, qui toto hoc
		numero 201930161, hoc

est, duplo fere minoris numeri inter se discrepant? Probata igitur est eidentissime harum duarum Proportionum K L, & M N inæqualitas. Probata ergo æquè eidenter tam Propositio 16 quam eius confirmatio hic allata. atque adeo demonstrata Quadraturæ, quæ ex earum Proportionum æqualitate pender; non viquequaque absoluta solutio.

Scholium.

Præter hæc duo allata exempla, quorum Epilogifmos tum hac tum præcedenti Propositione sigillatim & ad longum profecutus sum: alia aliquot sum aggressus, aliis & aliis factis suppositionibus linearum, quæ totius calculi ineundi rudimenta continent. vt scilicet ego à memetipso omnem scrupulum eximerem

M m erroris

erroris alicuius admissi. vix enim in animum inducere tandem potui tantum Geometram & sibi & aliis imposuisse in re apud Geometras præ cæteris celebrata. Verum in omnibus illud perpetuum observaui, vt scilicet Proportio K L Rationum A B, C D quam habent solida A, B ; & C, D ex ductu simplici orta, minor semper sit Proportione M N Rationum E F, G H ; quam habent solida E, F ; & G, H, ex ductu subalterno emanantia. En eorum exempla aliquot, quæ eodem seruato systemate breuiter expono, positis lineis vnde nascitur Proportio vtraque K L, M N, quæ æqualis esse deberet iuxta Assertionem Authoris, siue earum Proportionum Proportionalitas P Q ; cuius termini, æquales forent, si vere Geometra concluderet. In his porro omnibus suppono Latus rectum semper vnitatem constare ob maxima compendia inter putandum inde oriri solita, vt aliàs monui.

Latus rect.	— I ——— I ——— I ——— I
A B	—— 16 ——— 164 ——— 10 ——— 4
A V	—— 9 ——— 100 ——— 6 ——— 3
A E	—— 7 ——— 64 ——— 4 ——— 1
A I	—— 2 ——— 36 ——— 2 ——— 2
V O	—— 3 ——— 10 ——— Γ 6 ——— Γ 3
E F	—— Γ 7 ——— 8 ——— 2 ——— 1
E K	—— Γ 63 ——— 80 ——— Γ 24 ——— Γ 3

Proportionalitates.

P	—— 25748 ——— 36058 ——— 1318162 ——— 56060
Q	—— 30322 ——— 41629 ——— 1401055 ——— 61523

Habentur

Habentur in hac tabella quatuor diuersi casus, in quibus variæ supponuntur communis systematis quantitates linearum, itavt idem materialiter perseueret, formaliter tamen diuersum sit: quod ad iuuandam in concipiendo mentem, cui fini soli Geometricæ omnes delineationes inserviunt, non minus imò magis videtur idoneum. Ex ea linearum diuersitate diuersæ collectæ sunt Proportionalitates P Q eadem planè methodo, qua superius vsus sum Prop. 16. & 17. Ex datis scilicet lineis plana tam rectilinea quàm mixta collecta sunt, & ex planis solida siue quæ ex ductu absoluto, siue quæ ex ductu subalterno generantur: tum Rationum, quas habent inter se, Proportiones obseruatæ: ac tandem harum Proportionum habitudines, siue Denominatores: aut, quod idem est, Proportionalitates definitæ: vt constaret, æqualésne forent (vt noua Quadratura exigit) an inæquales Proportiones duæ; quod ex terminis Proportionalitatis P, Q, qui Proportionum quantitatem exprimunt, æqualibus vel inæqualibus concludi debet.

Quantam verò hic licet intueri inæqualitatem terminorum P & Q in his omnibus exemplis: In quibus, sicut & in duobus superioribus Propositionis 16 & 17 ea inæqualitas, eius est rationis; vt Proportionalitatis Antecedens P semper sit minor Consequente Q. Quo certissimo signo demonstratur Proportionem ipsam K L Rationum A B, C D ad ductus simplices spectantium, minorem esse Proportione MN, Rationum E F, G H, quas ductus subalternus generat.

Mm 2

Scito

Scito demum in his Epilogismis omnibus, licet numeris constent non mediocribus, nihil à me ommissum studij vel diligentiae; quo eos certos & ab omni labe immunes exhiberem: nullas non probationes operationum adhibui: varias ad eundem scopum vias aggressus sum; nullis peperci repetitionibus: qui quanti sit fastidij labor, nouit quisquis calculis huiusmodi maioribus, surdis praesertim fractisque numeris constantibus incubuit aliquando. Quod si nihilominus maioris certitudinis aut animi solum gratia, vestigia relegendo quibus ingressus sum, quempiam subeat studium calculos superiores examinandi: ne seipsum vel me condēnet erroris, si quando collecti numeri à meis non nihil discrepent obseruet eorum non paucos surdis radicibus exprimi; easque maiores interdum, interdum minores, quam verum ferat, prout ad illud magis vel minus accedere visae sunt, assumptas fuisse. Obseruet etiam occurrisse non rarò numeros fractos; quos in maximis numeris, vel omninò contempsit tanquam nullius momenti; vel etiam, quando vnitatis fractae semissem superabant, integram ipsam vnitatem vsurpauit. Horum, quae alioqui diuersitatis quidpiam & admissi erroris suspicionem inuehere meritò possent, si habeatur ratio: spero à Logista quouis omninò non rudi superiores omnes Epilogismos probandos fore. Atque adeò omni dubio procul Propositionem illam, quam excutimus, qua Rationum Proportiones (de quibus haecenus tam multa) aequales asseruntur omni, vitio non carere; eiusque propterea expertem non esse nouum hunc Tetragonismum

LIB. III. Examen triplicis Quadr. poster. 277
gonismum huic Proportionum æqualitati velut funda-
mento innixum.

PROP. XVIII. THEOR.

Secunda hæc Circuli Quadratura, & duæ in-
sequentes tertia & quarta huic affines, alio ad-
huc ex capite à Geometria vix agnosci debere
videntur.

EXPOSITIO.

Priusquam huius sententiæ meæ probationem, vel
potius eiusdem iam superius latæ confirmationem ad-
ducam: obseruandum est doctissimum Geometram
Quadraturam hanc suam secundam ita absoluisse Pro-
pos. 77. lib. 10. operis Geometrici: vt eam, non aliqua
singulari ad id instituta Propositione, sed pauculorum
verborum compendio ad calcem citatæ Propositio-
nis 77. quoddam quasi ex ea consequens Corollarium
attigerit. Quia, vt sibi quidem, nec immeritò, videba-
tur; absolutam tum fore Quadraturam constaret: si
modo constaret Propositionis huius veritas. Quare
etiam ipsa sola mihi nunc discutienda est: ipsa enim vel
labefactatâ vel stabilitâ, eandem sortem subitura est
huic superstructa Quadratura tota. Stabiliri quidem
firmiter omnino non potest. Cum enim medium, vn-
de tota probetur, non aliud assumatur, vt mox decla-
rabo, quàm Propositio 62. cuius robur tam multiplici
calculo superiore concussum est: & ipsam eodem im-
petu concussam fuisse necesse est. Verùm, id ita perfe-

M m 3 ctum,

Etum, quasi fundamentum suffodiendo: nunc verò, mutatâ aggressus ratione, etiam aperta vi illud ipsum Quadraturæ propugnaculum tentandum: id enim exigit totius huius discussionis præcipuum caput: exiget etiam fortassè Geometra non nemo Lector meus: qui superioribus calculis, per se sane satis molestis minùs delectabitur. Ponamus ergo nihil hætenus perfectum: Concedamus Propositionem illam 62. sibi constare: hisque permissis, Propositionis 77 citatæ oppugnationem ineamus: quam longe breviorē planiorēque superiori futuram polliceor. Ac in primis ipsa tota ex sensu atque adeo, verbis ipsis Authoris proponenda est; (seruato tamen systemate meo; & quibus constat iudicibus notis Alphabeticis) sic enim quæ admittenda, quæ reiicienda videbuntur; exponi facilius poterunt: nec ipsum totum Authoris opus illud eximium Lectori necessarium erit: cuius, ut rarum est, facultas multis non suppeteret. En ergo eius verba ad Propositionem 77, post constructionem figuræ: cui Prop. 9. Superiori omnino parem exhibui.

PROPOSITIO LXXVII.

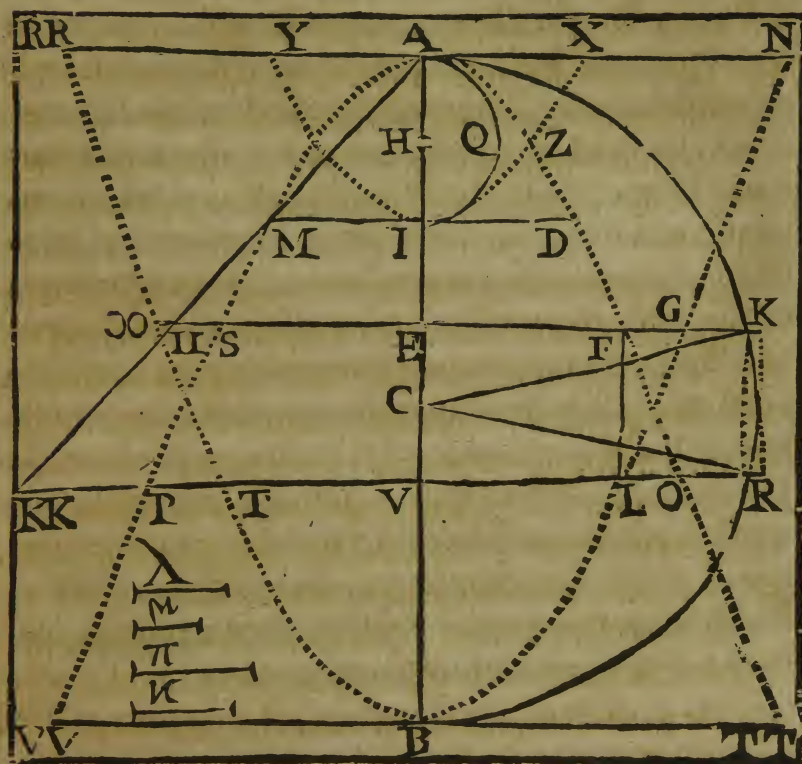
Oporteat autem rationem exhibere, quæ est inter corpora, quæ oriuntur ex subalterno ductu AID in IAX: & ex ductu FLO in LFG, vel inter solida quæ fiunt ex ductu subalterno planorum FLP in FLTOO, & AIM in IAT.

Vel meâ usurpatâ hætenus designatione; quam exposui Prop. 9.

Oporteat

LIB. III. Examen triplicis Quadr. poster. 279
 Oporteat Rationem exhibere quæ est inter corpora E &
 F; vel inter corpora G & H.

Figura Vigesimaquinta.



Constructio & Demonstratio.

Demonstratum est Prop. 62. quod Proportio quæ est inter
 Rationes solidorum A & B (mea vtor designandi con-
 suetudine) & C, D: eadem sit cum Proportione quæ repe-
 ritur inter Rationes solidorum E, F & G H. Tum paucis
 omissis ad rem nihil conducentibus. Igitur si Proportio
 rationis

A
 Fig. 25.

rationis inter A & B ad rationem inter C & D est ut Proportio rationum ΛM & ΠK : etiam Proportio, quæ est inter rationes $E F$; $G H$ eadem erit cum Proportione inter Rationes ΛM & ΓK .

B Quare etiam Proportio inter rationes corporum A, B , & $E F$ eadem erit (permutando scilicet) cum Proportione quæ est inter rationes corporum C, D ; & G, H .

C Ac proinde (inuertendo) ut est Proportio rationis, E, F ad rationem A, B : ita est Proportio rationis G, H ad rationem $C D$.

D Fiat igitur ut $F L O$ ductum in se ad $A I D$ ductum in se, hoc est ut B ad A . Ita $F L O$ ductum in se subalternè ad Δ , hoc est F ad Δ . Et fiat ut $A I M$ in se ductum ad $F L P S$ ductum in se ; ita $A I M$ ductum in se subalterne ad Φ , hoc est meo stylo, fiat ut D ad C ; ita H ad Φ .

E Erit itaque ut solidum ex ductu $A I D$ in se subalternè ad Δ , hoc est E ad Δ : Ita solidum ex ductu subalterno, $F L P S$ ad Φ , hoc est, solidum G ad Φ .

F Ac proinde cum hæ magnitudines prius sint reductæ ad Cylindricas quantitates illis æquales : etiam Proportionem rationum exhibuimus, quæ sunt inter illas ipsas magnitudines cylindricas.

G Quod sufficit ut ex communis Geometriæ principijs eadem partes Cylindricæ ad parallelepipeda illis æqualia reduci possint : præmissus enim omnia quæ ad hoc ipsum necessaria sunt, ut plenius in quarta Quadratura cognosci poterit.

Atque hæc est tota Authoris non tantum Propositionis ab eo adductæ probatio : sed præterea totius Quadraturæ suæ secundæ solutio obiter perstricta potius

LIB. III. Examen triplicis Quadr. poster. 281
 tius paucis illis extremis verbis; quàm pro rei dignitate, pertractata: quod forte queri iure, sibi videatur non nemo; dum obseruabit, illud vnum caput, cuius gratiâ tantum opus, tot Propositionum varietate distinctum, tanto labore concinnatum est; ne vno quidem exponi Problemate singulari: hoc ipsum ego sane non potui non mirari. Sed posthabitâ consilij huius (neque enim sine maturo consilio ita se gessisse vir tantus censendus est) inuestigandi curâ inutili: & absolutis, quæ ad expositionem allatæ Propositionis meæ necessaria videbantur, eius probatio est deinceps instituenda. Quæ, vt expeditiùs absoluator, totam ratiocinationem Authoris proximè allatam in paragraphos distinxi, & caractere quemque suo insigniui, vt facilius consulatur. Sit ergo

Demonstratio.

Resumatur itaque Propositio Authoris de qua agitur. *Oporteat, inquit, Rationem exhibere, quæ est inter corpora E & F: vel, inter corpora G & H.* Primum E dicitur illud, quod ex subalterno ductu segmenti Parabolici AID in se, oritur: vt hætenus à me vocitatum est iuxta Propositionem 9. Secundum F nascitur ex segmento FLO in se pariter subalternè ducto. At tertium G & quartum F ex segmentis FLPS, & AIM eodem modo ductis hanc, si fas est, è Geometriæ sinu abstrahit hoc argumentum.

Ratio solidi E ad solidum F, vel solidi G ad solidum H, exhibetur à Geometra per Proportionem notam

Nn Rationum

Fig. 25.

Rationum ipsarum E ad F & G ad H. Sed per Proportionem notam ipsarum rationū E ad F, & G ad H, exhiberi non possunt ipsæ rationes E ad F, vel G ad H. Ergo reuera ipsæ non exhibentur, vt asserit Propositio.

Figura Vigesimaquinta

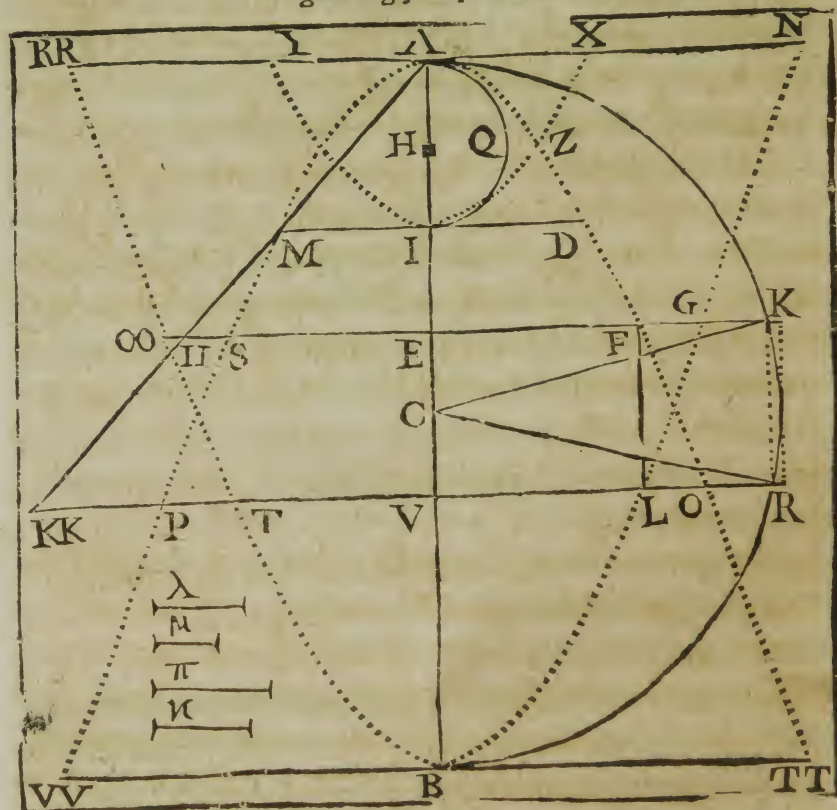


Fig. 25. Maior in controuersiam non vocatur à Geometra, vt ex toto contextu Propositionis huius suæ; & ex tanta congerie Theorematum, quibus hanc Proportionem rationum E ad F, & G ad C venari conatus est, euidentissimè constat. Consulantur vel prima ipsa verba superioris paragraphi A. Ita verò notam Proportionem illam

illam Rationum E ad F, & G ad H meminerit, vt id tantum permittatur à me; & concedatur, quod in expositione superiori concessum & suppositum est, nimirum veram esse Propositionem 62. Authoris, qua asserit eandem esse Proportionem rationum corporis A ad B; & corporis C ad D: & rationum corporis E ad F; & corporis G ad H: Atque adeo notam esse hanc, perinde vt illa nota est. Maior ergo illa sic vera esto.

Minor probatur. Ratio aliqua duarum quantitatuum singularis alicuius speciei nosci non potest per illud medium: quod nō vnā tantum singularem rationem sed infinitas perinde est aptum exhibere. Sed Proportio quauis data & nota, apta est infinitas rationes specie diuersas exhibere. Ergo Proportio Rationum E ad F, & G ad H, quamuis nota foret & data, Rationes illas exhibere nequit, quæ sint certæ vnus speciei.

Maior per se clarissima est. Minor ergo sola, probatione indiget: quam sic instituo euidentissimè, assumptis terminis discretæ quantitatis qui æque conueniunt continuæ. Esto notæ vel datæ Proportionis Denominator 2, qui velut quidā Antecedens connotat Consequentem terminum 1, vt libro 1. Prop. 2. exposui, & indicat Rationem duarum, ex quibus per se resultat hæc Proportio, priorem esse posterioris duplam (est enim Proportio, duarum rationum ratio; consule librum primum) Afferō igitur huiusmodi Proportionem, cuius Denominator est binarius siue 2. Rationibus infinitis, specie diuersis,

Nn 2 quarum

quarum prior sit posterioris dupla, æqualiter omnibus conuenire; & æque omnes denominare. Exemplis rem illustremus. Proponantur duæ rationes ita vt prioris Antecedens sit 8, & Consequens 2. (quæ ratio est Quadrupla) Posterioris verò Antecedens sit 4. Consequens iterum 2. (quæ ratio est dupla) quia igitur hæ duæ rationes 8 ad 2. & 4 ad 2. eundem habent Consequentem 2. eam habebunt inter se Proportionem siue etiam rationem (cum Proportio sit rationum ratio) quam ipsi Antecedentes 8 & 4 habent inter se per Prop. 7. lib. 1. huius. ita vt prior ratio 8 ad 2, dupla sit rationis posterioris 4 ad 2. siue Quadrupla ratio sit dupla rationis duplæ vt earum Proportionis Denominator 2 indicat. Rursus. Duas alias Rationes à duabus præcedentibus specie diuersas assumo: quarum Proportio, vt patebit, sit dupla. Sit ergo Antecedens prioris 10 & Consequens 4. posterioris verò Antecedens esto 5 & Consequens 4. idem scilicet cum Consequente prioris Rationis. Quia igitur harum duarum Rationum 10 ad 4 & 5 ad 4. idem est Consequens, nempe 4: ita se habebunt inter sese, vt se habent ipsi earum Antecedentes 10 & 5. per Prop. 7. lib. 1. huius. Erit igitur prior ratio 10 ad 4. siue dupla sesquialtera, rationis posterioris 5 ad 4. (quæ est sesquiquarta) dupla: Earumque Proportio (quæ aliud non est quam earum Rationum Ratio) dicetur dupla: qualis scilicet iam fuit Proportio Rationum 8 ad 2, & 4 ad 2 ab his specie diuersarum. Denique vt verbo rem absoluam, quoties duæ Rationes proponuntur

proponentur (Proponentur autem innumeræ) quarum termini Consequentes, æquales facti fuerint vel reductione vel suppositione. Antecedens verò unius, duplus fuerit Antecedentis, alterius: toties earum Rationum Proportio dupla erit. Quæ cum ita habeant: exhibebit, scilicet, aliquis ope notæ Proportionis duarum rationum, Rationes ipsas certæ & determinatæ alicuius speciei, & quantitatis terminorum suorum, cuiusmodi in præsentī negotio exhibendæ forent? Quæ igitur fieri potest, ut Propositio illa 77 Authoris datam fidem præstiterit, exhibueritque Rationem corporum E, F vel G, H, ex sola Proportione Rationum E ad F, & G ad H; quam, violatâ interim æquissimâ sententiâ calculi superius accuratissimè instituti, supponi permisi, non admisi, eandem esse cum Proportione Rationum A ad B & C ad D: quæ nota est, cum ipsæ Rationes sint corporum A, B; & C, D (quænam corpora hisce characteribus designem, iam sæpius declaravi) quæ parallelepipeda sunt eiusdem altitudinis: imo Rationes sint horum corporum basium, quæ rectis tantum lineis circumscribuntur.

Hoc dubium meum circa Propositionem hanc 77. non mediocriter auxit eius ipsa Conclusio longe à Propositione aliena. En ut sonat Propositio. *Oporteat Rationem exhibere, quæ est inter corpora E & F, vel inter corpora G & H.* Conclusio verò ut se habet? En eius verba ex paragrapho superiori F fideliter relata. *Ac proinde cum hæ magnitudines prius sint reductæ ad Cylindri-*

cas quantitates illis aequales (reductio hæc habetur
suprà Prop. 14. huius) *etiam PROPORTIONEM RA-
TIONVM EXHIBVIMVS, quæ sunt inter illas ipsas ma-
gnitudines Cylindricas.*

Eámne conclusionem tandem secuturam suspicari
quis posset? Nunquid Conclusio, ipsissima Propositio
non esse debet quæ vel probáda, si theoretica, vel sol-
uenda, si Problematica fuerit, vt hæc, in medium
adducta fuerat? huic Propositioni. *Oporteat Rationem
exhibere quæ est inter corpora E & F, vel inter corpora G
& H* seruatis Logicis Placitis, seruato Geometrarum
omnium etiam nostri, toto hoc eximio suo opere,
solemni Problemata concludendi more, non alia
potuit subnecti Conclusio, quàm huiusmodi. *ERGO
RATIONEM EXHIBVIMVS quæ est inter corpora E &
F, vel inter corpora G & H Quod erat faciendum.*

Illam verò. *Proportionem Rationum exhibuimus quæ
sunt inter ipsas Cylindricas magnitudines.* (Quam diuer-
sissimam pròdit vel ipsa paulò ante adducta ratioci-
natio mea) cur ei substituerit eximius Geometra, non
aliud mihi quidem occurrit causæ (aliud fortasse ipsi
occurrerit) quàm quod obseruarit non eò vsque pro-
motam fuisse constructionem suam vt Rationes ipsas
(quod apertius mox declarabo) exhiberet, vt Pro-
positionis sententia exigebat quo nomine, defectus
alicuius eandem arguere, saluo tanti viri iudicio,
coactus sum. Quod ne temere ausus in clarissimum
Geometriæ lumen vllò modo videar ipsam etiam
eius constructionem, vt proxime monui, nunc per-
pendam

pendam ante quam decretoriam Propositionis meæ conclusionem proferam.

Nemo Geometra non nouit Problema omne Geometricum, quale est hoc, quod excutimus, constructione, & ritè institutæ constructionis demonstratione constare. Hic non aliam obseruare licuit quàm quæ paragrapho D & sequenti E absoluitur. Postquam igitur iuxta Propositionem suam 62. quæ medium est vnicū ad stabiliedam assumptum, & quæ ut vera uti eum nunc quidem patior; exposuit per Permutationem Inuersionemque Rationum paragraphis B & C absolutam: eandem esse proportionem rationis E ad F ad rationem A ad B. (etiam hic memoriā refrica, significationis horum meorum characterum & tabellam, amote, denuo consule ad Propositionem 9. appensam) cum proportionem Rationis G ad H, ad Rationem C ad D; ita constructionem aggreditur citato paragrapho D.

Fiat igitur inquit, ut B ad A, ita F ad Δ. Et ut D ad C, ita H ad Φ. Hæc est constructio breuius sane tradita, quam rei momentum ferat quam plusculis aperio sigillatim.

Fiat ut B ad A, ita F ad Δ. Id ita absoluetur. Quia corpus B, quod illud est, quod oritur ex ductu segmenti Parabolici FLO in se, æquale est parallelepipedo cuiusdam quod notum est, ut Prop. 6. ostendi: corpus verò A, ortum scilicet ex ductu segmenti Parabolici AID in se, est etiam æquale cuiusdam parallelepipedo eiusdem cum priore altitudinis, quod item notum est ex citata

Propo

Propositione. Hinc fit vt nota etiam sit eorum corporum ratio : quæ alia futura non est quàm ratio basium eorundem parallelepipedorum ; cum ipsa sint æqualis altitudinis. Sint ergo bases in duo rectangula æqualis altitudinis reductæ : eorūque rectangulorum bases sint lineæ rectæ A & B : quæ expriment rationem duorum ipsorum solidorum A & B. Nec alia est natura solidorum C & D vt in eadem citata Prop. videre est. Quare peractâ Geometricâ operatione necessariâ , reperiuntur duæ rectæ lineæ C & D, rationem solidorum C & D exprimentes quam etiam exprimunt ipsa rectangula C & D.

Ad hæc corpus E, siue ortum ex subalterno ductu *Fig. 25.* in se Parabolici segmenti A I D; est solidum quoddam *Fig. 26.* æquale corpori cylindrico, vel cylindræo : cuius basis est semicirculus A Q I, vt fuscè superiùs loco citato declaratum est. Idem dic de segmento Parabolico A I M in se subalterne ducto, quod gignit solidum à me vocari solitum H. At corpus F quod est solidum genitum ex ductu subalterno segmenti Parabolici F L O, æquale est corpori cylindræo æqualis altitudinis cum præcedentibus E & H; cuius basis est mixta figura inter duas lineas E K, V R systematis interiecta, clausa verò, hinc quidem, rectâ ad lineas E K, V R perpendiculari; inde verò, arcu K R. Hæc vt Geometrice inueniatur etiam superiùs aperui Prop. 5. & 14. hic interim ea figura exponatur, suoque Characterè F insigniatur. Idem dicendum de corpore G, quod oritur ex segmento F L P S in se subalterne ducto. Sit ergo etiam eius basis ex-

O o posita,

posita, & inusta suo Charactere G. His ita declaratis.
Sic habet constructio.

Fiat ut linea B ad lineam A : ita planum F ad planum Δ ei simile, ut Elementa præcipiunt. Et fiat ut linea D ad lineam C, ita planum H (quod est semicirculus A Q I systematis ut paulò ante monui) ad planum siue semicirculum Φ . Hæc est tota Authoris constructio. Quid porro ex ea deducat, audiamus.

Erit itaque (subdit ut paragrapho E habetur modò solidorum loco, eorum bases sumantur) ut semicirculus siue planum E ad planum Δ : ita planum G ad semicirculum siue planum Φ .

At quo ex fonte hanc sequelam deriuat Geometra? vix, fateor, à querelis aduersus ipsum hic abstineo: quod Propositionem hanc, omnium totius operis sui grauissimam, quando omnium scopus ac finis est, Archimedeæ breuitate & grauitate, nullâ rudiorum Geometrarum mei similibus habita ratione tam paucis exposuerit, nec indicem saltem intenderit eò, vnde singula ipse hausisset. Sed omissa omni querela erga virum tam bene de Geometris meritum, sequelam hanc è posita constructione profectam, verissimam assero: & ab ipso Authore, qui in rationum negotio nihil à se desiderari passus est, assertionis demonstrationem haurio. Quæ ut apertior fiat; numeros assumam loco solidorum ex ductu tam simplici quàm subalterno genitorum, vel potius his æqualium solidorum cylindraccorum: aut etiam, quod expedit, loco basium, quibus solida illa cylindracea insistant; bases enim eandem seruant ratio-

O o 2 nem

nem quam corpora ipsa, quorum sunt bases: cum eadem sit eorum altitudo: eisque numeris eisdem Characteres inuram, ut numerorum ad bases illas translatio planior fiat.

Sit ergo in hoc schemate eadem Proportio Rationum A ad B, & C ad D; cum Proportione Rationum E ad F, & G ad H (veram enim esse Propositionem 62. Authoris, hic etiam supponi patior.) Ergo Permutando. Eadem erit Proportio Rationum A ad B, & E ad F;

A. 8	E. 10.	Δ 16
B. 2	F 4.	
C 6	G 15	Φ 24
D 3.	H 12	

cum proportione Rationum C ad D, & G ad H. fiat iam, ut iubet in sua constructione Geometra, ut B ad A; ita F ad Δ . & ut D ad C; ita H ad

Φ Dico ita esse E ad Δ , ut G ad Φ . Nam cum ponatur, ut Consequens B ad Antecedentem A; ita F ad Δ : etiam inuertendo, ita erit Δ ad F, ut A ad B. Ergo eadem est Proportio rationum Δ ad F, & E ad F; cum proportione Rationum C ad D, & G ad H. Sed propter similem constructionem; erit Proportio Rationum Φ ad H, & G ad H eadem cum Proportione Rationum C ad D & G ad H. Ergo eadem est Proportio Rationum Δ ad F & E ad F; cum Proportione Rationum Φ ad H, & G ad H. Quia verò tam Rationum Δ ad F, & E ad F, idem est Consequens F; quam Rationum Φ ad H, & G ad H, idem H. Erunt duæ priores Rationes Δ ad F (sive A ad B) & E ad F ut Rationum Antecedentes Δ & E. Hoc est, Proportio Rationum A ad B, & E ad

ad

Fig. 25.
 & 26.

ad F exprimitur denominatore Δ ad E per Prop. 2. libri Proportionalitatum vel per Prop. 7. lib. 1. huius. Similiter Φ & G erūt Denominator Proportionis Rationum C ad D & G ad H. Sed eadē est hac vtraque Proportio ex suppositione. Ergo ita est Δ ad E, vt Φ ad G. Vel Inuertendo, E ad Δ vt G ad Φ . Rectē igitur & suo more acutissimē intulit Author ex constructione suā, ita esse E ad Δ , vt G ad Φ . Vel Inuertendo. Δ ad E vt Φ ad G.

Atque ea sola æqualitas Proportionis Rationum A ad B, & E ad F; & Proportionis Rationum C ad D, & G ad H; quarum Proportionum Denominatores sunt Δ ad E, & Φ ad G; colligitur ex constructione ab Authore institutā. Nec vllō modo exhiberi potest eius constructionis operā, id quod maxime sperabatur, & Problema propositum exigebat: nimirum, vel Ratio solidi E geniti ex ductu in se subalterno segmenti Parabolici A I D, ad solidum Fortum ex ductu in se subalterno segmenti Parabolici F L O; aut solidorum Cylindraceorum illis æqualium: quorum bases, sunt semicirculus A Q I (quam etiam E vocito) & mixta figura F. vel etiam (quod idem est, & quod vltimō stabilitur, ad Problematis solutionem necessarium) ratio basium ipsarum E & F; cum eadem sit cum Ratione corporum vel etiam Ratio solidi G ad solidum H, siue etiam basium G & H, eandem cum solidis Rationem habentium. Imò tantum abest vt per hanc constructionem Ratio basis E ad basim F, vel basis G ad basim H obtineatur: vt ne ipsa quidem species Proportionis, quæ est inter rationes A ad B, & E ad F, vel Proportionis Rationū C ad D, & G ad H, eius ope reperiatur, sed æqualitas

litas tantum inter ipsas harum Rationum Proportiones, concludatur. Adeo ut Propositio hæc 77. ad exhibendam Rationem basis E ad basim F, vel basis G ad basim H; ineptior sit quam fuerat ipsa Propositio 62. quæ (nisi repugnaret calculus superior in illius Propositionis examen adductus) concludebat eandem esse Proportionem Rationis basis E ad basim F ad Rationem basis G ad basim H; cū Proportionem rationis basis A ad basim B, ad Rationem basis C ad basim D. cum enim hæc bases rectilineæ sint: ambæ Rationes notæ erunt, atque adeo earum Proportio: cui cum sit æqua- Fig. 25.
& 26. lis iuxta illam Propositionem 62. Proportio Rationum E ad F, & G ad H, etiam hæc Proportio nota erit: contra quam fiat in hac Propositione 77. In qua, utraque Proportio tam rationum A ad B, & E ad F; quam Rationum C ad D & G ad H, ignota est ob ignotas Rationes E ad F, & G ad H: cum quibus componuntur Rationes notæ A ad B, & C ad D ad procreandas Proportiones inter ipsas Rationes. Atque hæcenus satis multis, quæ tum quæstionis obscuritas, summâ cum tractationis à Geometra institutæ breuitate coniuncta: tum rei grauitas exigebant; satis clare mihi videor exposuisse Propositionem hanc 77. in qua tota erat posita difficultas. Nunc tandem concludo tota Ratiocinatione mea in hunc modum collecta.

Cum Propositio 62. Authoris, ex qua totum deriuatur robur Propositionis 77. ad Tetragonismum necessariae & proxime influentis labe aliqua laborare ostensa sit superiore tam multiplici calculo. Cum item, etsi illa vera & firma stare supponatur; nihilominus tamen hæc;

hæc; dū aliud expressis verbis pollicetur, expressis verbis aliud in conclusione præstat: dum Ratio \bar{E} ad \bar{F} , vel \bar{G} ad \bar{H} exhibiturā præ se fert, & Proportionem Ratio \bar{n} \bar{A} ad \bar{B} & \bar{E} ad \bar{F} & ratio \bar{n} \bar{C} ad \bar{D} , & \bar{G} ad \bar{H} inuestigat; apertū ruinæ discrimen incurrat. Cum tertio eius allata cōstructio ad Rationes exhibēdas, vt debuisset saluā eiusdem Propositionis fide, nō instituatur: sed nec ad aliud institui hac viā, quā ad Proportiones posse ostensum sit. Cū quartò Proportiones dictas ad aliquid circa Tetragonismum decernendum ineptas esse demonstrarim, nisi accedat ipsarum Rationum cognitio.

Cum denique suprema statutæ ab Authore conclusionis verba hæc. *Quod sufficit ut ex communis Geometriæ Principiis eadem partes Cylindricæ ad parallelepipeda ipsis æqualia reduci possint*, ipsis tantum Ratio \bar{n} ibus \bar{E} ad \bar{F} , vel \bar{G} ad \bar{H} certis & determinatis; non autem earum proportioni; quæ nec Rationes certæ speciei, nec certos earum terminos exigit; conuenire possint cum, inquam, tot ac tantæ difficultates, quas insolubiles mihi videor demonstrasse, occurrerint: æqui bonique consulat Geometra præstantissimus, si quò carius reliquū eius opus amplector, mirorque attentius; eò longius ab eius de absoluto à se Tetragonismo sententiā abripiar, firmiusque tuear veritatem huiusce meæ Propositionis 18. qua asserui nō tantum hanc secundam circuli Quadraturam, sed etiā duas insequentes tertiam & quartam huic affines, iisdemque Principiis innixas, eodem demonstrandi genere collectas, vix à Geometria agnosci posse, adeoque saxum hoc Geometris adhuc super esse versandum,

F I N I S.



APPENDIX

In qua nouus quidam Tetra-
gonismus discutitur
& re. tur.

Praelo prope diem proditura erat illius ce-
tebris Quadraturæ superior discussio mea:
cum ab Amico *D. Comiers* noua circuli
Quadratura transmissa est: quam apud multos Geo-
metriæ non imperitos maximo cum plausu exceptam
referebat. Hortabatur insuper vt, quando me ex supe-
rioris tam prolixi quàm perplexi examinis cæco Laby-
rintho faustissimè, aiebat, expediuissem; hunc etiam re-
cens exortum Tetragonismum aggrededer; cum ab
instituto non esset hæc opera aliena; nec longior futu-
ra, vnus scilicet Propositionis nec adeò reconditæ,
quam ad me mittebat, discussione, absoluenda. Sua-
sum tunc quidem mihi vt, tum Amico tum mihi ipsi
priuatim satisfaciendi gratiâ, opus adorirer. Nec morâ
a post

A P P E N D I X.

post admodum longâ, aut grauiore contentione comperi vitij aliquid (quod hac in re quantulumcunque, censetur maximum) in ea circuli Quadranti ratione latere : nec per eam exhiberi , vt ab Authore asserbatur, rectam lineam circulari peripheriæ æqualem ex data diametro ; sed paulò minorem. Placuit tamen ea Quadratio non mediocriter ; tum quia perficitur Geometricâ solutione , qua nec simplicior nec expeditior obseruetur ; tum maximè , quia vix vlli, ex innumeris, quæ passim teruntur , de præcisione concedat. Quæ perpendenti mihi tum demùm non ægrè , quod proponebatur , persuasum est. hanc scilicet nouam Cyclometriam non intactam hic esse relinquendam , nec esse planè indignam , quæ angulum quempiam in tabula , à qua necdum longè manum amoueram , occuparet. Desiderari quidem poterat à me plenior totius tractationis cognitio , quàm quæ vnica Propositione contineretur. Absolutius enim futurum fuisset examen hoc meum : si omnium Propositionum , è quibus hæc vltima colligitur, facta mihi facultas fuisset : fuisset enim continuò mihi facta facultas, ea, quæ obiici possent, petendi non è discretæ tantùm , sed continuæ etiam Quantitatis fundamentis. Sed quando horum omnium cognitionem assequendi spatium præcidit operarum fini imminentium tædium : ecce nunc quidem solam ad me datam Propositionem ; meamque deinceps breuiter expositam de eâ sententiam.

Propo

APPENDIX.

Propositio Cyclometrica.

Si ad lineam, quæ potest radium & sinum Grad. 22. min. 30. circuli cuiusvis, addatur semissis radij: componetur recta linea æqualis circumferentia Quadrantis eiusdem circuli.

Expositio & Constructio.

Hæc est illa ad me totidem verbis delata Propositio absque diagrammate, quod in hunc modum constituo.

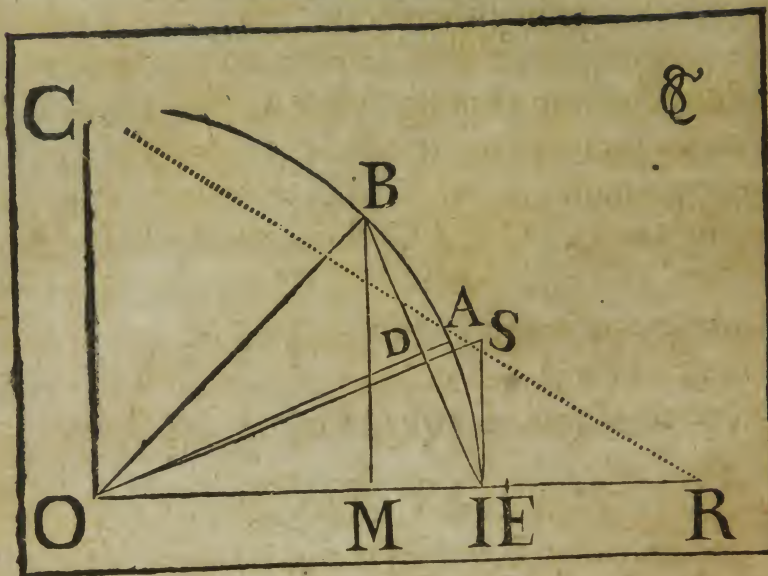
Centro O describatur circuli Quadrans CBI. Quo *Figura sequens.* diuiso bifariam in B, rursumque arcu BI diuiso bifariam in A, ducantur lineæ OB, OA, BI: secabitur BI bifariam in D à recta OA; eritque ID sinus arcus IA qui continet Gradus 22. min. 30. Excitetur à puncto I lineæ OI, ad ipsam perpendicularis IS, æqualis sinui ID; ducaturque OS. Poterit hæc linea OS, radium OI, simulque sinum ID, aut IS per 47. lib. 1. huic lineæ OS sumatur æqualis OE in linea OI productâ, eidemque addatur ER æqualis semissi radij OI. Erit ex Cyclometricæ sententia, tota recta linea OR æqualis peripheriæ CBI Quadrantis. Quod an verum sit, nunc est expendendum.

PROPOSITIO SUPERIORI ADVERSA.

Breuior est recta linea OR: quàm vt arcui CBI æqualis esse possit.

a 2 Demon

APPENDIX.



Demonstratio.

Si finûum Canonem consulamus, vt consuli satis
 rutò potest; paucis innotescet Assertionis meæ veritas;
 Nam in triangulo rectangulo OIS, si ponatur OI fi-
 nus totus 100 000: erit IS tangens anguli IOS. Sed,
 cum IS ponatur æqualis sinui ID; sit autem sinus ID
 notus in partibus sinûs totius OI: erit etiam tangens
 IS in eisdem partibus nota atque adeò ex Canone no-
 tus erit angulus IOS; cuius secans est OS. Ergo &
 OS nota erit. Hæc ad rem applicemus. Sinus ID est
 38 268. qui conuersus in tangentem IS secans ei respon-
 dens est 107 072. tantâque est OS, siue OE, huic adde
 ER 50 000 semissem radij: fiet tota OR 157072 æqua-
 lis iuxta Cyclometram arcui CBI. Quod si OR
 157072 duplicetur, vt fiat 314 144 hæc erit peripheriæ
 semicirculi æqualis: ad quam ita se habebit per 15.
 lib. 5. semediameter OI 100 000; vt se habet diame-

APPENDIX.

ter ad totam circumferentiam. Sed posita diametro 100 000 ; circumferentia ex recentiorum Geometrarum accuratissimis Epitogismis maior verâ est 314 160, & minor verâ 314 159; à qua deficit hic inuenta 314 144. hæc ergo multò magis, breuior erit quam par sit. Patet ergo rectam O R à Cyclometra assignatam, breuiorem esse quàm ut arcui C B I æqualis esse possit. Quod erat demonstrandum.

Confirmatio.

Propositionis meæ aduersus nouam hanc Cyclometriam.

Preparatio.

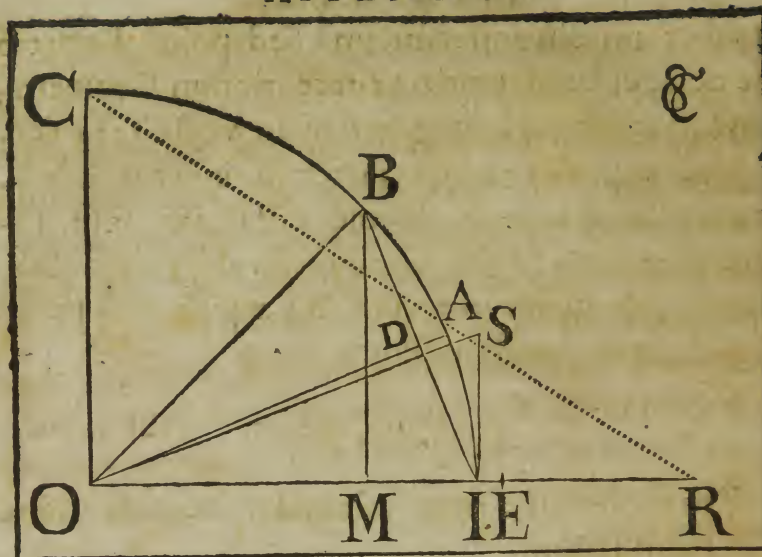
Quia sinus non sunt ut plurimum ita præcisi, ut aliqua, fractiuncula non omittatur: dubitauerit fortasse quispiam, ne defectus huius Cyclometriæ proximè obseruatus inde totus proficiscatur. Quod dubium absterget penitus calculus ex ipsamet hypothesis peritus.

Ducatur itaque B M ad semidiametrum O I perpendicularis. Erit ergo B M æqualis rectæ O M (est enim in triangulo rectangulo O M B angulus O semirectus ex hypothesi; ergo & semirectus est eiusdem angulus B per 32. lib. 1. Ergo per 6. lib. 1. æquales sunt M B, O M). Ex notis verò M B, M I, nota fiet B I, atque adeò eius dimidia I D siue I S. Notis denique O I, I S nota erit O S siue O E, & tandem tota O R.

Primò ergo quæritur recta M I hoc modo. Radius

a 3 O I

APPENDIX:



O I siue O B est 100 000. Eius Quadratum 10 000 000 000 æquale est duobus Quadratis M B, O M. Ergo eorum alterum O M est 5 000 000 000. Cuius radix est 707 107', maior verâ; & 707 106' minor verâ. hac radice O M minore verâ 707 106', demptâ ex toto radio O I 100 000 : restat M I 292 894' maior verâ. (ma-
iorem verâ de industria assumo vt huic Cyclometriæ
magis faueam, vt constabit.)

Secundò quæritur I B. Cum nota sit facta M I, & eius Quadratum notum erit, nempe 85 786 895 23'6, & quidem maius vero, cum M I sit maior verâ, huic si addatur Quadratum lineæ M B, quod est 5 000 000 000; fient duo simul Quadrata 585 786 895 23'6 hoc est Quadratum B I & quidem maius vero.

Tertiò. Quæritur recta O S. Quadratum I D, siue I S; est quarta pars Quadrati lateris B I (est enim I D, semissis lineæ B I) quæ quarta pars Quadrati B I, est

APPENDIX.

146 446 723 80'9. huic si addatur Quadratum radij OI, fiet Quadratum basis OS trianguli OIS. 1 146 446 723 80'9 maius véro (ne excidat) ergo radix eius numeri, quæ est 1070723', maior verâ; exprimet lineam OS, siue OE, ei ex constructione æqualem, & quidem paulò maiorem verâ, hoc est, paulò maiorem, quàm ipsa linea OE exigat.

Quartò. Determinatur recta OR. Si ad OE 1070 723' addatur 500 000' semissis radij, vt præcipit Cyclometra, fiet ipsa OR 1570 723 paulò maior quàm re ipsa sit OR Geometricè inuenta ex mente & constructione Cyclometræ.

Quintò. Conclusio tandem colligitur, eadem propè quæ superius. contra hanc Cyclometriam. Si linea OR 1570723' æqualis, arcui Quadrantis CBI, duplicetur, fiet peripheria semicirculi 3141446' paulò maior verâ, posita semidiametro 1000 000'. At eadem positâ semidiametro, semiperipheria totius circuli, siue, peripheria semicirculi minor verâ iuxta peritissimos Geometras est 3141590'. Ergo aut dicendus est ab hoc nouo Cyclometra numerus 3141446' maior quàm numerus 3141590' (cum hic minor sit quàm ipsa vera quantitas peripheriæ semicirculi, ille verò eâdem peripheria maior sit ostensus) quod foret absurdum, aut fatendum veram Cyclometriam hoc modo non haberi. Quod hic confirmandum erat.

Corollaria.

Quædam hic obseruatione digna omitti non debent: quæ in modum corollarij obiter proponam.

Coroll. I.

APPENDIX.

Coroll. I.

Constat calculum proximè initum non alios numeros offerre; quàm qui superius per sinus definiti fuerant. Hic siquidem ex semidiametro 1000 000' inuenta est ex mente noui Cyclometræ, peripheria semicirculi 3141446', quæ per sinus collecta fuerat 314144: expunge fractionem decadicam, quæ nullius momenti censi debet, iidémque planè numeri vtrimque supererunt.

Coroll. II.

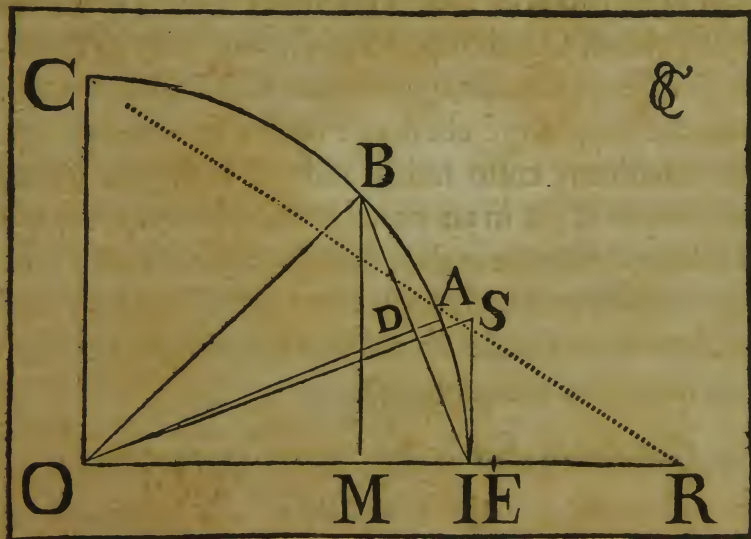
Constat ex collecto Epilogismo nouum Cyclometram falsò aliquo Principio in Antecedentibus vsum, aut formâ abusum syllogisticâ; neque enim conclusio falsa aliunde proficisci potuit iuxta certissima Logicorum Placita.

Coroll. III.

Constat, quod initio asserui, vix vllam Geometricam rationem circulum in Quadratum conuertendi hætenus innotuisse, vel ad praxim obseruari posse, hac breuiorem aut faciliorem. Quid enim facilius quàm lineæ OR arcui CBI æqualis, determinatio? cum ex diuisione Quadrantis in quatuor partes æquales, quæ facillima est, tota pendeat; vt ex superiori constructione apertum est. Quam verò accurata sit hæc methodus ex calculo superiore apertum est: quo constat peripheriam semicirculi colligi huiusmodi 314144 ex
radio

APPENDIX.

radio 100 000: ex quo iuxta recentiores geometras
statuitur 314159: ita ut differentia tantum sit unitatum
15. qui numerus continetur in numero 314159 toties,
quot sunt in hoc numero 20 944 unitates. Ita ut, si
linea OR diuidatur in partes 21 600, vnica tantum ex
his partibus deficere possit, quominus æqualis sit arcui
CBI Quadrantis. Quænam igitur geometrica ratio
circulum Quadrandi, hac facilius inueniri possit?



Coroll. 4.

Si in eadem figura ducatur recta linea CR : trian-
gulum CO R erit Quadranti OC BI æquale. Nam
Rectangulum sub radio CO, & rectâ lineâ æquali se-
micircumferentiæ circuli, ciculo est æquale ex Archim.
Ergo rectangulum sub radio CO & rectâ, quæ sit
æqualis dimidiæ circumferentiæ semicirculi, hoc est,
b peri

APPENDIX.

peripheriæ Quadrantis CBI ; cui ponitur æqualis linea recta OR , est æquale semicirculo: Ergo semissis illius rectanguli, hoc est, triangulum $CO R$ æqualis erit Quadranti circuli eiusdem.

Coroll. V.

Si Quadratrix linea illa celeberrima intra Quadrantem COI describeretur; eius basis æqualis proximè foret lineæ IR partiūmque foret 57072, qualium radius OI est 100 000. Ducta etiam recta CR , non tangeret quidem Quadratricem in C , cum recta OR minor sit ostensa tantillò, quàm arcus CBI ; ab eo tamen contactu non longè abesset; eamque secaret intra ipsum circulum, cuius radius radij CO duplus foret; transiret per C , & in eo puncto Quadratricem tangeret; ipsaque tangeretur ab eadem CR , sicut & de Quadratrice dictum est. Sed his nunc quidem missis; totum hoc opus claudō duobus maximi momenti Corollariis ex ipso toto collectis.

Corollaria duo in Epilogum ex toto hoc opere deducta

Primum.

Observabunt, opinor, Geometra circuli Tetragonismum olim meditaturi, ex hisce pauculis à me in rem Geometricam collatis: quanti apud ipsos ponderis esse debeat integerrimum & apertissimum Arithmetices iudicium. Quod in suis ratiociniis, ut plurimum abstrusioribus & longa serie productis nisi consulant: mirum, nisi sibi primum ipsis,

zum

APPENDIX.

*um Aliis imponendi periculum incurrant : Ut incurrere ha-
Etenus (quod vel ex iis constat) non pauci ; nec pauciores
effugere. In quibus summus ille Cyclometrarum apex Archi-
medes præ cæteris commendandus & imitandus videtur:
qui huius difficultatis , aliarumque similium solutionem per-
scrutans , nihil nisi quod Arithmetices testimonio approbare-
tur , asseruit unquam. Quem nuper non sine laude secutus
est proximè R. P. Antonius Lalouera Societatis nostræ , in
subtilissimo illo opere , quod de Tetragonismicis Elementis
conscripsit , & è staticâ totum mirâ arte collegit , testatur
ipse lapsurum se sæpius fuisse : nisi opportunè manum , lucem-
que præbisset Arithmetica. Quare quisquis hunc nodum
extricandi cupiditate tenebere impostum : Ut fœlicem,
quod faxint Superi , exitum operæ sortiariis ; aut minimum
quod maximi apud te momenti esse debet , nominis tui existi-
mationem tueri velis : Geometriam sororis Arithmeticæ con-
sortio consilioque destitui nunquam patiare.*

Secundum.

*Cernitis , ô Geometra , quorum disputationi traditus est
orbis ; quam egrè in alienam figuram illum converti contin-
gat. Cum ab ipsis Matheseos incunabulis tam multi eius
Alumni clarissimi , tantâ contentione , tam incassum incu-
buerint. Vnde tanta difficultas , ut fere impossibilitas cen-
seatur ? Negemusne aliquod , curuum inter & rectum , dari
commercium ? Haud quaquam. Quam multe quantitates
tam plani quam solidi generis (lineare rectico) curuum cum
recto commutarunt ? Quam multis modis Parabola ab Ar-
chimedee , à Gregorio hoc nostro , ab Aliis Quadraturam su-*

b 2

bire

APPENDIX.

*hirc coacta est? Quot curvilinea in rectilinea conuersa tota
 huius operis primâ parte ex Illustrissimo Prasule retuli? non-
 ne & Anguli ipsi curui in rectum commutationem admit-
 tunt? In solidis Verò nonnè Angula siue cuneus ex Cylindro
 tam circulari quàm Parabolico abscissus enormi planè ambitu
 circūscriptus in Parallelepipedum regularissimū à Gregorio &
 Lalouera subactus est? Desunt fortasse Principia huius co-
 gnitionis propria? (communia enim quâ deesse possunt? Neque
 ea est difficultatis origo. Nihil in rerum natura tam infœ-
 cundum (omnium minimè circulus) ex quo singulares que-
 dam & propriæ facultates non efflorescant: ex quibus laten-
 tis ipsius naturæ ratio arguatur. Semicirculus, aut alia que-
 uis circuli portio, grauitatis centro non caret: & definit;
 definit Quadraturam circuli P. Ioan. de la Faille è Societate
 nostra, in subtilissimo opere: quod de centro grauitatis par-
 tium circuli & Ellipsis edidit. Nemo dubitauerit quin segmen-
 tum circuli quodlibet in duas partes vel equalitatis vel inæ-
 qualitatis rationem datam seruantes diuidi possit. At ea posita
 diuisione: ponitur statim circuli Tetragonismus. Detur Archi-
 medi recta linea quæ helicæ eius contingat: nihil aliud ad ab-
 solutam circuli Quadraturâ desideratur. Detur & mihi lineâ,
 quæ pariter Quadratricem in infinitum ultra antiquum
 eius Verticem productam, ut in elementis Geometriæ pra-
 cticæ docui, quouis in puncto pariter osculetur: nonne ibidem
 obiter perstrinxi perfici Tetragonismus? Quid plura con-
 geram, cum innumera sint; quibus planum fiat, circulum
 non carere medijs, quibus deposita circulari figurâ rectilineâ
 induere possit. Denique nec Artificum renui industria, aut
 remissa contentione, quæ summa semper fuerunt, factum
 cenferi*

APPENDIX.

censeri debet, ut hunc defectum tamdiu passa sit Geometria. Unde ergo factum? haecenus inde factum ego quidem reor: unde imposterum factum iri censeo, ut posteros omnes Geometras lateat eadem cognitio: aliunde scilicet quam ex ipsius rei naturâ ignorationis huius ratio petenda mihi videtur.

An igitur quia totum hoc, quod sensu percipitur, globosum corpus ad enarrandum supremi opificis gloriam præ cæteris rebus materiae immersis institutum, eo munere minus absolutè fungeretur nisi illa ipsa eius figura spherica omnimutatione superior foret. Spherica quidem esse debuit, ut scilicet, perfectissima: ut capacissima: ut unico simplici termino definita: ut principio ac fine carens: ut eandem undique sui speciem exhibens: ut intra locum in omnem partem mota quasi immota permanens: ita enim Archetypi sui summam perfectionem, immensitatem, eternitatem, Unitatem, immaterialitatem quoquo modo adumbratura erat. Ut verò eiusdem absolutam immutabilitatem referret, quod aptius symbolum ei inuri debuerat, aliud à priuatione facultatis aliâ à circulari figurâ induendi? An quia fortasse audaces quidem, felices tamen illæ Geometrarum mentes, quæ terrestribus aëreisque omnibus radio subactis suo, immensa etiâ, profundissimâque spatia arcanâque caelestia adsciritis illis suis oculis præ hæcenus usurpatis ad stuporē acutioribus perlustrant omnia: tenuitatis facile obliuiscerentur sua; nisi figura illa unica, quâ nulla apud ipsas tritior, nulla ad operandum magis necessaria, & quæ sæpius adhibeatur, nulla, cum aliquod eius vestigium rebus in omnibus creatis, maximis, minimis observare liceat, oculis magis obuia: earum

APPENDIX.

ingeniū aciem, ita iubente diuinā Sapientiā, ad cecitatem perstringeret; vigiliāsque omnes, & animi contentionem eluderet? Denique, An quia supremus rerum Artifex, dum eas in figuram quoquo modo sphericam ut ad motum expeditissimam omnes effinxit; simulque, ut eius permutandæ facultatem omnem, ita & omnem quietis spem præcidit non Geometrarum modò sed mortalium quemque monitum vouit nullis eorum omnium, quæ supremi orbis complexus fouet, quorūque figura præterit, ei esse vnquam conquiescendum: eamque petendam ciuitatem, quæ extra orbem in Quadro posita eternū quietura est. Hanc, si sapimus, Geometra mei, Quadraturam non sine spe eius, diuinā fauente gratiā, assequenda, totā animi corporisque contentione inquiramus. Valete fauete.

INDEX



INDEX

Fractorum numerorum : qui
hoc opere continentur.



VM fracti numeri duplici constent
ordine Characterum : hos propter-
ea non nisi minutiores exhibere po-
test Typographia, nec nisi cum pe-
riculo oculorum aciem vel fugiendi, vel fal-
lendi : cui facile occurreretur proposita maioris
formæ numerorum fractorum, qui hoc opere
continentur, synopsi : quam, cum libuerit, con-
sulas. Quilibet autem quæsitus numerus oc-
currerit expeditissimè obseruatis tum paginâ
tum exordio lineæ, in quibus numerus quæsi-
tus reperitur. Quod si plures eadem linea con-
tineat : eodem seruato ipsorum ordine omnes
hic reponitur.

Pagina 141.	tur, ducta	$\frac{1}{2}$
Lineis		2
Cum his $\frac{1}{2}$	ALB	$\frac{1}{2}$
		2

pars

INDEX

pars — $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{12}$ solid.

ne Antec. — $\frac{1}{24}$

Pyram. — $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{3}{24}$

assump. — $\frac{1}{8}$

ta pars — $\frac{1}{120}$ $\frac{1}{8}$

lindium — $\frac{1}{120}$ $\frac{2}{15}$

tota — $\frac{4}{15}$

Pag. 152.

Lineis

$\frac{1}{2}$ erit — $\frac{1}{2}$

ipfa — $\frac{1}{2}$

Ad — $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

habet — $\frac{1}{2}$

Apoll. — $\frac{1}{8}$

IL — $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$

teribus — $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$

$\frac{3}{16}$ Rectang.

Pag. 153.

Lineis

ctangulum — $\frac{3}{16}$

recta — $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{16}$

dinem — $\frac{3}{8}$ $\frac{9}{128}$

parallel. — $\frac{9}{128}$

modo — $\frac{1}{2}$

vna — $\frac{1}{6}$

linea — $\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}$ ductus — $\frac{1}{8}$

misegmenti — $\frac{1}{24}$

area — $\frac{3}{8}$

FRACTORVM.

$$\frac{3}{4} \text{) produc.}$$

$$\text{genitum } \frac{3}{96} \cdot \frac{1}{3}$$

Pag. 154.

Lineis

$$\text{esse } \frac{2}{15}$$

$$\text{segmenti } \frac{1}{240}$$

$$\text{ta partib. } \frac{2}{15}$$

$$\text{ducta } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16}$$

$$\text{hæc } \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{24} \quad \frac{1}{384}$$

$$\text{femissis } \frac{1}{768}$$

$$\text{Cylind } \frac{3}{768}$$

$$\text{in minimis } \frac{1}{256}$$

Pag. 155.

Lin.

$$\text{pars } \frac{1}{3840}$$

$$\text{bet ad } \frac{3}{768}$$

$$\text{tandem } \frac{1}{240}$$

$$\text{rectang. } \frac{9}{128}$$

$$\text{VLX } \frac{1}{32}$$

$$\text{prod } \frac{1}{331}$$

$$\text{reduction. } \frac{240}{3840}$$

Pag. 158.

Lineis

$$\text{diuifa } \frac{1}{2}$$

$$\text{HQ) crit. } \frac{1}{4}$$

Pag. 159.

Lin.

$$\text{ZIZR } \frac{1}{2}$$

$$\text{crit } \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

C

INDEX

area	$\frac{1}{4}$		
ducatur	$\frac{1}{4}$		
ducatur	$\frac{1}{4}$		
fiet	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
produc	$\frac{5}{16}$		
baretur	$\frac{4}{5}$		
tur in	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{16}$	
ZHI	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
fit ex	$\frac{4}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
tudo	$\frac{1}{8}$		

Pag. 160.

Lin.			
Quare	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
ducatur	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	
solid.	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	

solid	$\frac{1}{16}$		
operat.	$\frac{1}{12}$		
iam	$\frac{1}{12}$		
super	$\frac{5}{16}$	$\frac{19}{48}$	
sepon.	$\frac{19}{48}$		

Pag. 173.

Lin.			
reper	$\frac{2}{15}$		
ZVLI)	$\frac{331}{3840}$		

Pag. 174.

Lin.			
duplic.	$\frac{331}{1920}$		
prior	$\frac{2}{15}$	$\frac{331}{1920}$	
modi	$\frac{1}{6}$		
Cubi	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

F R A C T O R V M.

$$\begin{array}{r} \text{AEN} \quad \frac{4}{6} \end{array}$$

Pag. 177.

$$\begin{array}{r} \text{Lin.} \\ \text{fuit} \quad \frac{2}{3} \\ \text{triang.} \quad \frac{1}{6} \\ \text{le est} \quad \frac{1}{2} \\ \text{cum} \quad \frac{1}{2} \\ \text{Sta Z X} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \text{æquale} \\ 4 \\ 1 \\ \text{Prod.} \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{fis est} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{array}$$

Pag. 178.

$$\begin{array}{r} \text{Lin.} \\ \text{Ergo} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \text{Parall.} \quad \frac{1}{4} \\ \text{Z V semp.} \quad \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{4} \text{ cui} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Quod} \quad \frac{1}{6} \\ \text{ne habeb.} \quad \frac{11}{12} \\ \text{ergo} \quad \frac{11}{12} \end{array}$$

Pag. 188.

$$\begin{array}{r} \text{Lin.} \\ \text{uenti} \quad \frac{2}{15} \cdot \frac{331}{1920} \\ \text{Prop.} \quad \frac{3}{12} \end{array}$$

In Schemate huius paginae.

$$\begin{array}{r} \frac{2}{15} \cdot \frac{331}{1920} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{12} \end{array}$$

Pag. 240.

$$\begin{array}{r} \text{Lin.} \quad \frac{2}{2} \\ \text{addatur} \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \\ 166 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{numero} \quad \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{1} \end{array}$$

Pag. 241.

$$\begin{array}{r} \text{Nunc} \quad \frac{1}{3} \end{array}$$

C 2

INDEX

tabola	$\frac{2}{1}$
	$\frac{3}{3}$
etanguli	$\frac{1}{1}$
	$\frac{3}{2}$
erit	$\frac{1}{3}$

Pag. 243.

Lin.	$\frac{2}{1}$
Parab	$\frac{3}{1}$
	$\frac{3}{2}$
eius	$\frac{1}{3}$
	$\frac{3}{2}$
p'lanum	$\frac{1}{3}$

Pag. 245.

Lin.	$\frac{1}{1}$
duplum	$\frac{3}{1}$
	$\frac{3}{3}$
leous	$\frac{1}{6}$
	$\frac{3}{1}$
manebit	$\frac{6}{2}$
EFO	$\frac{3}{1}$
	$\frac{1}{1}$
numerus	$\frac{3}{1}$
	$\frac{2}{5}$
355	$\frac{3}{6}$

in tabella	$\frac{1}{5}$
40	$\frac{653}{6}$
	$\frac{1}{1}$
3	$\frac{40}{2}$
	$\frac{6}{2}$

Pag. 246.

Lin.	$\frac{1}{1}$
A 243	$\frac{3923}{6}$
	$\frac{19}{6}$
B	$\frac{243}{6}$
D	$\frac{1}{6}$

Pag. 250.

Lin.	$\frac{1}{1}$
Prop.	$\frac{3}{1}$
ne	$\frac{1}{3}$

Pag. 252.

Lin.	$\frac{2}{1}$
planum	$\frac{3}{2}$
	$\frac{1}{3}$
sue	$\frac{3}{1}$
	$\frac{3}{1}$
dantur	$\frac{3}{1}$
	$\frac{1}{3}$
hinc	$\frac{1}{3}$

Errata emendata.

Primæ Partis.

Pag. Linea.

p.17.l.7.datam diuidere datam rationem diuid.p.22.l.4.à fine externam extremam.p.23. In fig. Vbi linea FH secat arcum AD, deest I p.23. l. 4. punitus punctis. p.26. l.3. Angulum continent Angulum A FH contin. p.29. l.2. mixtum æquale mixtum AIR æquale. p.35. l.9. F D G F G D p.43.l.2. à fine illo in L isto illo in I, isto p.48.l.3. à fine verbo verò p.64.l.15. diametrum AB. semic. diametrum AB semicir: p.81. l.12. Ergo duo sectores Ergo per 13. Prop. duo p.98.l.3.segmento AB segmento ALD. p.109.l.2. à fine Chordæ AC Chordæ BC.

Secundæ Partis.

In figura paginæ 5.& in scripto ponitur F pro γ qui character significat radicem.

Pagina 158. figura paginæ præcedentis repetenda est, delenda hic posita.

Pag.162. In scripto ponuntur Græci characteres maiusculi; cum minusculos exhibeat figura.

In fig.20.in sectione lineæ AB cum linea à puncto V deducta deest Z.

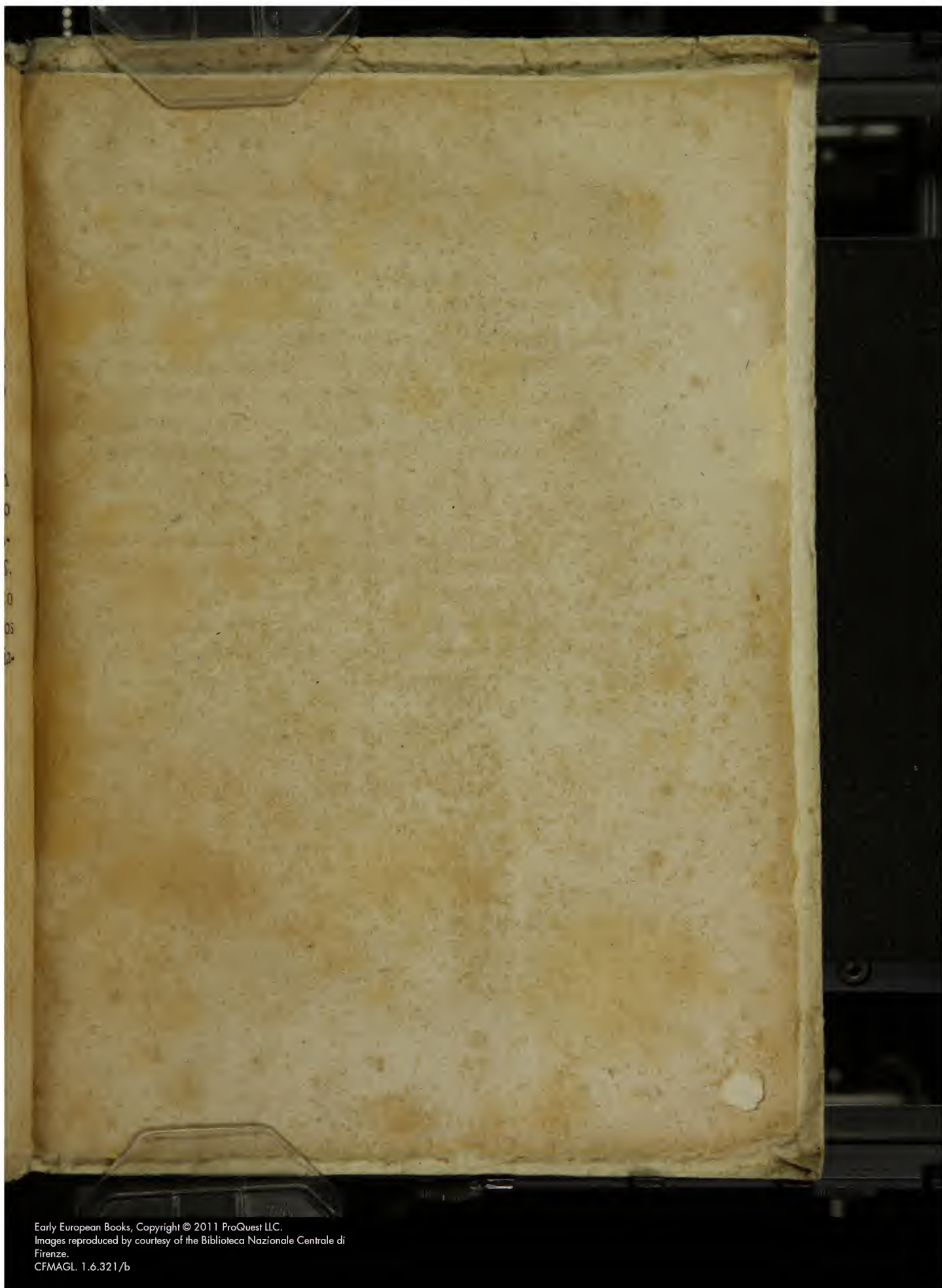
p.36.l.5.à fine Rationem EF. Productam Rationem EF productam. p.40. l.3. à fine vt F Consequens ita F Consequens. p.49.l.1.habet. Secundum schema: habet secundum schema contin. p.61.l.6.si ab aliquo si sint ab aliquo p.64.l.14. habet habent p.91.l.10. immotis immotas p.105.l.2.à fine similiter secantis similiter secantes p.122.l.10. Augmentatione Argumentatione p.156.l.4.adductus ad ductus p.161. l.2. quæcunque RN quæcunque KN. p.164.l.15.figura β I figura β γ I Z p.164. l.1. à fine β M A θ E β μ λ θ E p.167.l.1. B, Γ , Δ β , γ , δ . p.180. l.13. à fine nota etiam erit. Quid nota etiam erit tertia p.183.l.6. A ad C; item A ad D, & BD A ad C, B ad C item A ad D, & B ad D. p.192. l.2. Ille Antecedenti ille Antecedens.

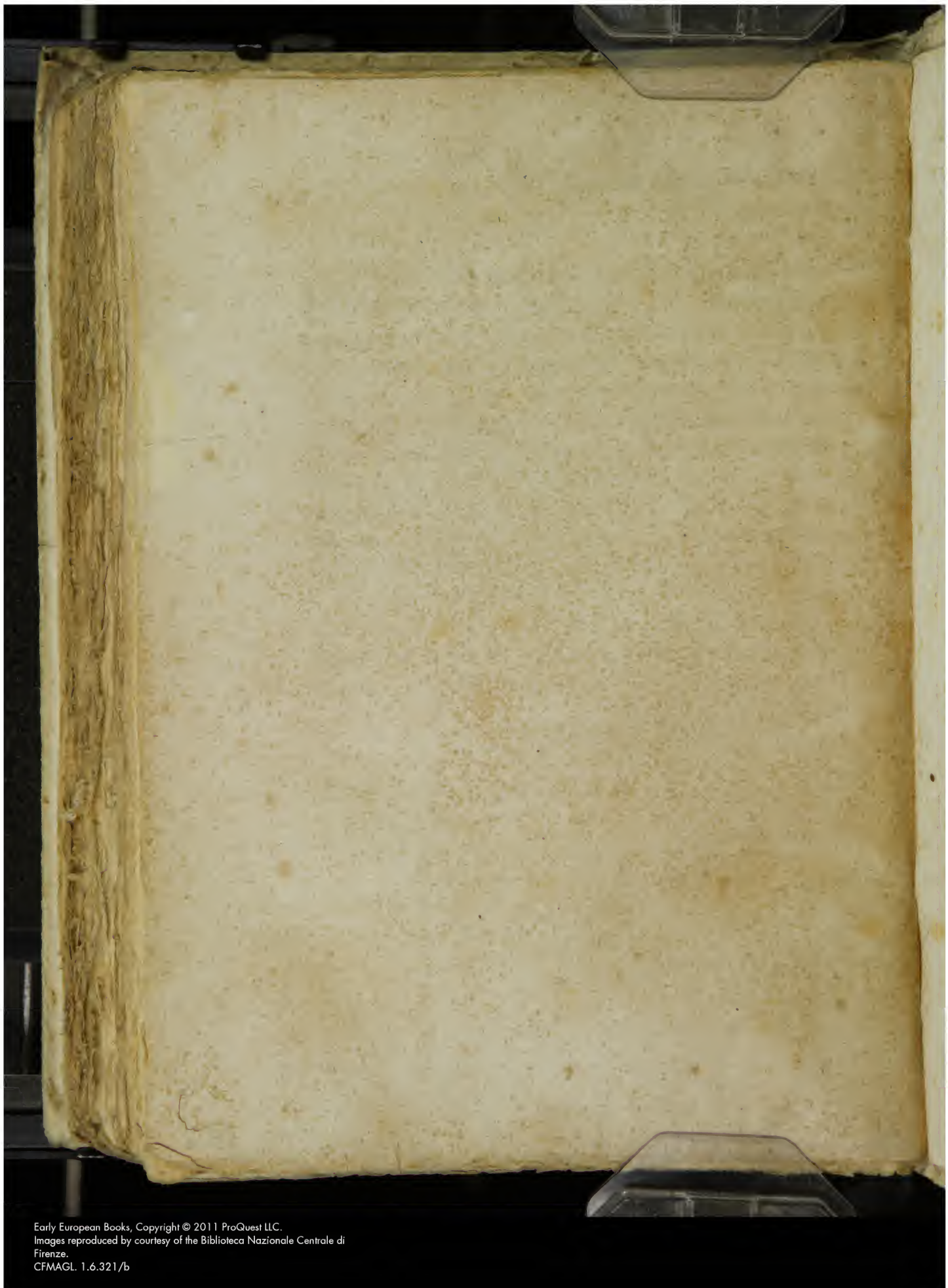
p.222.l.5. mixturam mixtarum. p.231.l.4. à fine vtrumque vtrumque p.233. l.11. à fine ELPS FLPS p.234.l.1. SFOI SFOT p.236.l.2. à fine ET 16 EII 16 p.237.l.3. siue 45 siue 45 p.239. in tabula VK 25 VKK 25 ET 16 EII 16 p.243.l.7. à fine 405 405' p.255. l.4. ortum ortam p.260.l.15. sextum sextam p.263.l.6. à fine in eo meo p.265. in tabella CA 90'945 CA 9090'45 p.274 in tabula Fæpius pro γ p.281.l.4. à fine ductis hanc ductis, hanc p.282.l.3. à fine G ad C Gad H p.287.l.9. ad stabiliendam ad stabiliendum.

P E R M I S S I O.

PAVLVVS DE BARRY Prouincialis Societatis IESV in Prouincia Lugdunensi, iuxta Priuilegium eidem Societati à Regibus Christianissimis Henrico III. 10. Maij 1583. Henrico IV. 20. Decembris 1606. Ludouico XIII. 14. Februarij 1611. & Ludouico XIV. nunc regnante, 23. Decembris 1650. quo Bibliopolis omnibus prohibetur, ne Libros ab eiusdem Societatis hominibus compositos, absque Superiorum permissione imprimant: Permittit GVILLELMO BARBIER Typographo Regio, vt Librum cui inscriptio est, *Examen Circuli Quadraturæ*, à P. GREG. A S. VINCENTIO *propositæ*, Authore P. VINCENTIO LEOTAVDO Societatis IESV, ad decem proximos annos imprimere, ac liberè diuendere possit. Datum Gratianopoli 20. Aprilis, anni 1654.

PAVLVS DE BARRY.







005643881
005643880

